Problème de Minkowski
et surfaces à courbure constante.
dans les variétés hyperboliques

François LABOURIE

Dans le cas d'une surface convexe compacte dans $\mathbf{R}^3$, l'application de Gauss est un homéomorphisme entre cette surface convexe et la sphère unité. A une surface convexe dans l'espace euclidien, on peut alors associer une fonction sur la sphère unité, à savoir la fonction induite de la fonction courbure sur la surface par l'application de Gauss.

Le problème de Minkowski dans l'espace euclidien s'énonce ainsi: *quelles sont les fonctions sur la sphère obtenues ainsi?* La surface associée sera alors appelée solution du problème de Minkowski.

Ce problème à une solution dont l'énoncé est simple et élégant ([N] et dans un autre cadre [Po]):

Théorème. (Nirenberg,Alexandrov,Pogorelov) *Il existe une surface convexe solution du problème de Minkowski pour une fonction k positive définie sur la sphère S^2, si et seulement si*

$$\int_{S^2} \frac{u}{k} ds = 0,$$

où u est le vecteur position sur la sphère et ds l'élément d'aire. De plus, une telle surface est unique à translation près.

Nous nous intéresserons à un problème analogue dans le cadre des variétés hyperboliques. La solution de ce problème nous permettra d'étudier les surfaces à courbure de Gauss constante plongée dans ces variétés. Enonçons notre nouveau problème:

Soit M une variété hyperbolique géométriquement finie et sans cusp, (c'est-à-dire à coeur de Nielsen N compact) et différente du tore plein. La variété $M \setminus N$ est alors la réunion finie de variétés B_i (voir 1.1.). Chaque B_i est homéomorphe à $S_i \times \mathbf{R}$, où les S_i sont les surfaces de Riemann compactes de genre g plus grand que 2 qui sont les composantes connexes du bord M_∞ de M à l'infini.

Dans une telle variété où plus généralement dans un *bout géométriquement fini* B (voir 1.2.), associé à une lamination géodésique mesurée, dont le bord à l'infini est B_∞, se pose naturellement un problème de Minkowski.

Soit en effet S, une surface convexe lisse et incompressible dans B. On définit l'application de Gauss, ϕ, de S dans B_∞ en associant à tout point de S la géodésique normale extérieure en ce point. On associe donc à toute telle surface convexe S une fonction $F(S)$ sur B_∞, donnée par

$$(*) \qquad F(S) = g \circ \phi^{-1}$$

où g est la fonction courbure de S. Comme dans le cas euclidien, nous nous intéresserons aux fonctions ainsi définies sur le bord à l'infini.

Notre premier résultat est le suivant

Théorème 1. *Soit k une fonction C^∞ définie de B_∞ dans $]-1,0[$. Il existe alors une unique surface convexe S incompressible dans B, telle que*

$$k = F(S)$$

Ce résultat est, pour le problème de Minkowski, l'analogue du résultat de M.S.Berger ([B]) pour le problème de Nirenberg:

Théorème. (M.S.Berger) *Toute fonction négative sur une surface de Riemann de genre au moins 2, est la courbure d'une unique métrique conforme.*

En appliquant notre résultat à une fonction constante, on en déduit l'existence et l'unicité d'une surface S_k à courbure constante k pour tout k dans $]-1,0[$. Un exemple bien connu de cette situation est le cas où M est le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe fuchsien: les surfaces équidistantes de l'hyperplan de symétrie sont alors à courbure constante et de plus forment un feuilletage. Cette situation est en fait le cas général:

Théorème 2. *Chaque bout géométriquement fini de dimension 3 est feuilleté par une famille de surfaces (S_k) à courbure constante k appartenant à $]-1,0[$,.*

Remarquons que ceci nous fournit une nouvelle manière de nous promener dans l'espace de Teichmüller à partir d'un point et d'une lamination géodésique mesurée.

Le théorème 1 nous permet également de définir, pour tout réel k, une application f_k de $H(M)$, l'espace des structures hyperboliques géométriquement finies et sans cusp d'une 3-variété M, dans l'espace de Teichmüller de son bord à l'infini.

Cette application associe à tout point de $H(M)$, la structure conforme de l'unique surface à courbure constante k, bordant un convexe contenant le coeur de Nielsen. Ceci est bien sûr lié à la paramétrisation de $H(M)$ par la structure conforme induite sur le bord à l'infini ([T], [M]) comme nous le verrons en 4.1. On en est conduit naturellement à se demander si ces applications sont également des paramétrisations. Notre réponse est partielle et montre simplement que ces applications sont surjectives, ce que l'on peut énoncer comme un théorème d'existence de métriques.

Théorème 3. *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3, convexe compacte et différente du tore plein, et soit g une métrique à courbure constante strictement supérieure à -1, sur ∂M, le bord de M. il existe alors une métrique hyperbolique complète h sur M dont la restriction à ∂M est g.*

La question qui reste posée est donc celle de l'unicité de la structure hyperbolique sur M avec notre donnée au bord.

Les résultats obtenus ici permettront dans [L2] d'obtenir de nouvelles paramétrisations de l'espace des $\mathbf{CP}^1$-structures sur une surface de Riemann compacte.

Remarquons pour finir, que la démonstration du théorème 1 utilise les résultats et la terminologie de la théorie des courbes pseudo-holomorphes à la Gromov. Nous montrerons en particulier que tout problème à courbure de Gauss prescrite peut se traduire dans ce langage.

1 Rappels et définitions

1.1 Variétés hyperboliques. Nous rappelons ici quelque définitions et propriétés concernant les variétés hyperboliques. Pour une introduction plus complète, nous renvoyons à [T]. Soit M une variété hyperbolique complète et de dimension 3 que nous voyons comme le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe discret Γ. Son groupe fondamental Γ agit naturellement sur la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique. On dit que ce groupe est *kleinien* si son ensemble limite n'est pas toute la sphère. L'enveloppe convexe de cet ensemble limite dans le modèle projectif de l'espace hyperbolique est lui aussi invariant par Γ. On appelle *coeur de Nielsen*, le quotient de cette enveloppe convexe par le groupe fondamental. Le coeur de Nielsen N est un ensemble convexe qui a comme propriété d'être l'intersection de tous les sous-ensembles convexes homotopiquement équivalents à M. On dit enfin que M est *géométriquement finie et sans cusps* (g.f.s.c.) si son coeur de Nielsen est compact. Dans ce cas, le *bord à l'infini* M_∞ de M est une réunion finie de surfaces de Riemann compactes S_i. La variété $M \setminus N$ est alors la réunion finie de composantes connexes B_i homéomorphes à $S_i \times \mathbf{R}$. Les variétés B_i sont des *bouts géométriquement finis* au sens de la définition suivante:

1.2 Définition. Une variété hyperbolique complète de dimension 3, B, est un *bout géométriquement fini* (figure 1) si

(i) B est homéomorphe à $S\times]0,\infty[$, où S est une surface de Riemann compacte.

(ii) Si $\bar{B}$ est le complété métrique de B, et $B_0 = \bar{B} \setminus B$ est le bord de B, alors B_0 est isométrique à une surface compacte à courbure -1.

(iii) Le bord de B est concave, c'est à dire il n'existe pas de géodésique tracée dans B reliant deux points du bord.

Figure 1

(iv) B_0 est une surface plissée au sens de Thurston

Remarquons donc que le bord B_0 (qui n'est en général pas lisse) de B est alors muni d'une métrique à courbure -1, et d'une lamination géodesique mesurée. Réciproquement, deux telles données permettent de construire un bout géométriquement fini. ([C.E.G.])

On définit ensuite le *bord à l'infini* B_∞ de B comme en [B.G.S], en le considérant comme l'espace des demi-géodésiques complètes divergentes et minimisantes, quotienté par la relation d'équivalence: être asymptotique. Il est facile de vérifier que c'est une surface de Riemann compacte.

Il est enfin clair que dans un bout géométriquement fini le rayon d'injectivité tend vers l'infini lorsque que l'on s'approche du bord à l'infini.

1.3 Application de Gauss. Soit maintenant S une surface convexe incompressible dans un bout géométriquement fini. Ceci est une manière pédante de dire que S sépare B en deux composantes connexes; l'une convexe contenant B_0, l'autre contenant B_∞ (figure 2).

Dès lors par convexité, chaque géodésique partant de S vers l'extérieur tend vers le bord à l'infini. On peut donc définir une *application de Gauss* ϕ de S dans B_∞ en associant à tout point de S la géodésique normale extérieure en ce point (figure 2).

Enfin et c'est une remarque que nous utiliserons souvent, il est facile de montrer que si J est la structure complexe induite sur S de celle de B_∞ par l'application de Gauss, elle s'obtient de la manière suivante: si J_0 est la structure

Figure 2

complexe naturelle de S et A l'opérateur deuxième forme fondamentale nous avons

$$J = (1+A)^{-1} J_0 (1+A).$$

2 Preuve du théorème 1

Ce théorème se démontre par la méthode de continuité . Nous avons défini une application F de l'espace C des surfaces convexes incompressibles à courbure strictement négative dans l'espace K des fonctions de B_∞ dans $]-1,0[$. Il nous suffit de démontrer que

(i) F est un homéomorphisme local.
(ii) F est propre.
(iii) C est connexe et non vide.

En effet F sera alors un revêtement ((i),(ii)) de C sur K. Le résultat découlera alors du fait que C est connexe et K simplement connexe.

2.1 F est un homéomorphisme local. Occupons nous tout d'abord du linéarisé DF de F. L'espace tangent à C en S, s'identifie aux fonctions sur S, en associant à une telle fonction f la section fN du fibré normal, où N est la normale extérieure unitaire de S. Pour démontrer (i), il nous suffit de démontrer le lemme suivant et d'appliquer un théorème d'inversion locale, comme le théorème de Nash-Moser (cf [H]).

2.2 lemme. *DF est un opérateur linéaire elliptique du second ordre inversible.*

preuve: Soit S une surface convexe et fN une section du fibré normal. Soit maintenant (ψ_t) une famille d'immersions de S dans M, telle que ψ_0 soit l'identité et,

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \psi_t(x) = f(x)N.$$

On notera ϕ_t, l'application de Gauss de la surface $\psi_t(S)$. Nous voulons tout d'abord calculer

$$(1) \qquad DF(f) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \, (k_t \circ h_t),$$

ici k_t est la fonction courbure de la métrique g_t induite sur S par ψ_t, et h_t désigne l'application $(\phi_t \circ \psi_t)^{-1}$. Remarquons tout d'abord que la variation infinitésimale de métrique induite par ψ_t est donnée par

$$\frac{d}{dt} |_{t=0} \, g_t(u, v) = 2g_0(Au, v),$$

où A est l'opérateur deuxième forme fondamentale associé à la normale extérieure. D'après nos hypothèses sur la courbure de S, cet opérateur est symétrique et positif. Un bref calcul nous donne alors que la variation de courbure infinitésimale est

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} |_{t=0} \, k_t = f(-k_0.tr(A)) - tr(D^2 f \circ A^{-1})(1 + k_0),$$

ici $D^2(f)$ désigne l'opérateur qui à un vecteur tangent u à S associe la dérivée covariante du gradient de f le long de u. Par ailleurs, la variation de vecteur normal associée à f est

$$\frac{d}{dt} |_{t=0} \, n_t = -grad(f).$$

Nous en déduisons donc que

$$(3) \qquad \frac{d}{dt} |_{t=0} \, (h_t(y)) = B(grad(f)),$$

où B est un endomorphisme de l'espace tangent à S. On obtient donc en réunissant (1),(2) et (3), l'équation suivante:

$$(**) \qquad DF(f) \circ \phi_0 = f(-k_0.tr(A)) - tr(D^2 f \circ A^{-1})(1 + k_0) + C(grad(f)),$$

où C est un endomorphisme de l'espace tangent à S.

L'opérateur A étant symétrique positif, on vérifie aisément que l'opérateur différentiel défini par l'equation $(**)$ est elliptique du second ordre et d'indice nul puisque homotope au laplacien classique. Pour finir de démontrer le lemme, il nous suffit maintenant de montrer que son noyau est nul. Soit donc f telle que

$$(4) \qquad f.tr(A)(\frac{-k_0}{1 + k_0}) - tr(D^2 f \circ A^{-1}) + C(grad(f)) = 0.$$

Maintenant d'après nos conditions sur la courbure de S, la fonction $\frac{-k_0 tr(A)}{1+k_0}$ est positive, par ailleurs l'opérateur A étant positif, une application simple du principe du maximum montre que f est nulle. ∎

2.3 C **est connexe et non vide.** Nous avons tout d'abord besoin du

2.4 Lemme. *L'espace des bouts geométriquement finis est connexe.*

preuve: D'après [C.E.G.], que nous avons cité en (1.1.), l'espace des bouts geométriquement finis s'identifie à l'espace des laminations mesurées sur les surfaces hyperboliques. Cet espace est connexe: il suffit d'homotoper la mesure transverse à zero.. ∎

Nous avons montré dans les sections précédentes que F était un homéomorphisme local et propre. Autrement dit, F est un homéomorphisme de chaque composante connexe de C dans K. De plus, le nombre $n(B)$ de composantes connexes de C est fini.

Pour finir, nous voulons montrer

2.5 Lemme. *$n(B)$ vaut toujours 1.*

preuve: Remarquons que le lemme précédent entraîne aisément que n est toujours supérieur ou égal à 1. Supposons donc maintenant qu'il existe deux surfaces plongées à courbure constante k_0, S_1 et S_2. Ces deux surfaces ont nécessairement une intersection non vide.

En effet, sinon on pourrait projeter convexement l'une sur l'autre, ce qui est impossible puisque cette projection convexe est contractante et que ces surfaces ont la même aire par Gauss-Bonnet. Maintenant à S_2, par exemple, correspond une famille C_∞ , (S_k), de surfaces à courbure constante: les solutions des problèmes de Minkowski à courbure constante k dans la composante connexe de S_2. Quand k tend vers -1, la surface S_k converge vers B_0, à nouveau pour une question d'aire.

Dès lors pour un certain k_1 inférieur ou égal à k_0, la surface S_{k_1} est tangente intérieurement à S_1. Or ceci entraîne que k_1 est supérieur à k_0, et la contradiction. ∎

3 Preuve du théorème 2.

En reprenant les notations du théorème 1, une première étape de la démonstration de ce théorème est la suivante:

3.1 Proposition. *Soit S une surface à courbure constante, et f une fonction telle que $DF(f)$ soit constante, alors f garde un signe constant.*

preuve: Rappelons l'equation (**) de 2.2.

$$DF(f) \circ \phi_0 = f.tr(A)(\frac{-k_0}{1+k_0}) - tr(D^2 f \circ A^{-1}) + C(grad(f)).$$

Supposons que $DF(f)$ soit constante et positive, nous allons montrer que f est elle même positive. Nous allons utiliser comme en 2.2. , le principe du maximum.

Plaçons nous au point ou f est minimum, nous obtenons alors

$$DF(f) \circ \phi_0 + tr(D^2 f \circ A^{-1}) = f.tr(A)(\frac{-k_0}{1+k_0})$$

Le premier terme de cette égalité est positif et comme $tr(A)(\frac{-k_0}{1+k_0})$ est également positif, f est positive en ce point. ∎

Remarquons que nous aurions pu utiliser la même idée de démonstration qu'en 2.5., mais ceci ne nous aurait fourni qu'un feuilletage seulement C^0.

Nous avons donc demontré que la famille (S_k) feuillette un ouvert de B, pour conclure il nous faut démontrer que la famille (S_k) feuillette bien B entièrement. C'est ce que nous permet d'affirmer la proposition suivante

3.2 Proposition. *Soit (S_k) la suite de surfaces à courbure constante k donnée par le théorème 1, alors*

$$\lim d(S_k, B_0) = \infty.$$

preuve: Chaque surface convexe S_k borde un convexe C_k. Considérons $C_0 = \bigcup C_k$. Le bord de C_0 est constitué de la réunion de surfaces convexes plongées localement isométriques au plan euclidien. Notre but est de démontrer que ce bord est vide.

Pour ce faire, remarquons tout d'abord que l'application de Gauss définie de ce bord dans le bord à l'infini de B est une immersion. En particulier nous aurons démontré notre résultat, si nous montrons que cette application de Gauss est K-quasi conforme: il n'existe pas d'immersion quasi-conforme d'une surface complète plate dans une surface de Riemann de genre g.

Soit S une surface convexe dans l'espace hyperbolique, dont la structure complexe est J_0 et l'opérateur deuxième forme fondamentale est A. La structure complexe J induite par l'application de Gauss, de celle du bord à l'infini est

$$J = (1+A)^{-1} J_0 (1+A).$$

En particulier notre proposition se réduit au lemme suivant

3.3 LEMME. *Soit S une surface convexe plongée complète et plate, dans B, telle que $d(B_0, S)$ est strictement positif. Il existe alors une constante K telle que la courbure moyenne de S, H est uniformément majorée par K.*

preuve: D'après nos hypothèses et puisque nous sommes dans un bout, il existe un réel r positif, telle que toute boule de rayon r dans B, centrée en un point de S, soit isométrique à une boule de l'espace hyperbolique.

Par ailleurs, il existe r_0 inférieur à r, telle que toute boule b_0 de rayon r_0 de S soit isométrique à une boule du plan euclidien. Chaque boule b_0 est alors plongée dans le bord d'un convexe d'une boule de l'espavce hyperbolique. D'après la proposition 5.4.(iii) de [L1], nous en déduisons qu'il existe une constante A telle que, pour toute boule b_0

$$\int_{b_0} H ds \leq A.$$

Maintenant en utilisant le théorème D de [L1] , on en déduit que la courbure moyenne de S est uniformément majorée. ∎

4 Preuve du théorème 3

Soit $H(M)$ l'espace des structures hyperboliques géométriquement finies et sans cusps de M. Plus précisemment, $H(M)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des paires (M_0, ψ_0), où M_0 est une variété hyperbolique complète géométriquement finie et sans cusp et

$$\psi_0 : M_0 \to M$$

est une quasi-isométrie. La paire (M_0, ψ_0) est équivalente à (M_1, ψ_1) s'il existe une isométrie

$$F : M_0 \to M_1$$

telle que $\psi_1 \circ F$ est homotope à ψ_0 par une homotopie propre qui s'étend en une homotopie de $(\bar{M}_0, M_{0,\infty}) \times [0,1] \to (\bar{M}, M_\infty)$. Ici $\bar{M}$ désigne la compactification de M obtenu en ajoutant $M\infty$.

Les résultats précédents nous permettent de définir une application f de $H(M)\times]-1,0[$ dans $T(M_\infty)$, l'espace de Teichmüller du bord de M à l'infini.

On associe en effet à (h,k) la structure conforme induite (gâce à l'application de Gauss) sur M_∞ de celle de la surface à courbure constante k dans M muni de la métrique h.

Nous allons tout d'abord préciser le lien de de cette application avec l'application cannonique f_0 qui à une métrique h de $H(M)$ associe la structure conforme naturelle sur M_∞. Rappelons que, d'après un célèbre théorème de Bers (voir [M] p 82), cette application f_0 est une bijection.

4.1 Lien avec la structure conforme à l'infini.. Nous voulons montrer que nous pouvons prolonger par continuité f à $]-1,0]$, grâce à f_0. Plus généralement, nous allons démontrer

4.2 Proposition. *Soit (B^n) une famille de bouts géométriquement finis convergeant vers un bout géométriquement fini B et soit (k_n) une suite de réels tendant vers 0 . Alors la suite de structures conformes des surfaces S_n à courbure constante k_n dans B^n converge vers la structure conforme de B_∞*

preuve:

Soit A_n l'opérateur deuxième forme fondamentale de S_n, nous voulons démontrer que A_n converge uniformément vers l'identité.

En effet, rappelons que si S est une surface convexe dans un bout géométriquement fini, dont la structure complexe est J_0 et l'opérateur deuxième forme fondamentale est A, la structure complexe J induite par l'application de Gauss de celle du bord à l'infini est

$$J = (1+A)^{-1} J_0 (1+A).$$

Soit donc s_n une famille de points de S_n, nous savons que $d(s_n, B_0^n)$ converge vers l'infini (3.2.) . Nous en déduisons qu'il existe une suite (r_n) de reéls tendant vers l'infini tels que

(i) les boules b'_n de B_n centrées sur s_n et de rayon r_n sont isométriques à des boules de l'espace hyperboliques. Soit G_n l'isométrie correspondante envoyant s_n sur un point fixé de l'espace hyperbolique.

(ii) les boules b_n de S_n centrés sur s_n et de rayon r_n sont homéomorphes au disque et plongées dans b'_n dans le bord d'un convexe C_n.

Nous pouvons maintenant extraire une sous-suite de façon à ce que $G_n(C_n)$ converge vers un convexe C_0. Nous allons montrer que ce convexe est une horoboule.

D'après notre construction, le bord S_0 de ce convexe est isométrique au plan euclidien. Or (cf [S]) les seules surfaces plates plongées dans l'espace hyperbolique sont les horosphères et les surfaces équidistantes d'une géodésique.

Le bord de $G_n(C_n)$ converge donc vers une horosphère, de plus s'agissant de surfaces plongées, et en utilisant la même remarque que à la fin de la démonstration de 3.3., cette convergence est C^∞. En particulier, l'opérateur deuxième forme fondamentale en x_n converge vers l'opérateur deuxième forme fondamentale d'une horosphère, c'est à dire l'identité. ∎

4.3 Démonstration du théorème 3. Nous pouvons donc d'après le paragraphe précédent étendre par continuité f à $]-1,0]$, grâce à f_0. Appelons encore f l'application prolongée et g l'application qui à (h,k) associe $(f(h,k),k)$, le lemme crucial permettant de demontrer le théorème est alors le suivant

4.4 Lemme. *L'application g est propre*

preuve: On se donne donc (k_n) une suite de réels convergeant vers un réel k_0 et (h_n) une suite de métriques hyperboliques géométriquement finies te sans cusp telles que la suite de structures conforme (J_n) des surfaces S_{k_n}, définies grâce au théorème 1 converge. Notons alors A_n l'opérateur deuxième forme fondamentale sur S_{k_n}.

Nous voulons donc démontrer que la suite (h_n) possède une sous-suite convergente, c'est à dire que la suite de structures conformes sur le bord à l'infini,

$$J_n^0 = f_0(h_n)$$

possède elle aussi une sous-suite convergente.

Il nous suffit pour cela de montrer que le rapport de conformalité entre J_n et J_n^0 est uniformément majoré. D'après la formule

$$J_n^0 = (1 + A_n)^{-1} J_n (1 + A_n),$$

il nous suffit de majorer la trace de A_n c'est à dire la courbure moyenne. Pour démontrer notre résultat, il nous donc suffit de démontrer que la courbure moyenne des S_{k_n} est uniformément majorée.

Soit donc (x_n) une suite de points de S_{k_n}. La suite des structures conformes des S_{k_n} convergeant, il existe r telle que la boule B_n de S_{k_n}, centrée sur x_n et de rayon r, soit topologiquement un disque.

En relevant ces disques au revêtement universel, nous obtenons une famille d'immersions isométriques de B_n dans l'espace hyperbolique, dont les images sont incluses dans le bord d'un convexe. La famille des métriques sur B_n convergeant, nous pouvons utiliser la même remarque que à la fin de la démonstration de 3.3. et conclure que la coubure moyenne est uniformément majorée sur tout compact de B_n. ∎

Notons f_k l'application de $T(M_\infty)$ dans lui même qui à un point t associe $f(f_0^{-1}(t), k)$. Le lemme suivant entraîne alors notre théorème

4.5 Lemme. *L'application f_k de $T(M_\infty)$ dans lui même, est propre et de degré 1. En particulier, elle est surjective*

preuve: Compactifions $T(M_\infty)$ qui topologiquement est une boule en rajoutant un point à l'infini pour obtenir une sphère S. La propreté de g nous permet d'une part d'étendre f_k en une application de S dans elle même , et d'autre part de réaliser une homotopie entre f_k et f_0 qui par construction est l'identité. Ceci montre notre lemme. Ceci est ce qu'il nous fallait démontrer.

5 Appendice: Courbes pseudo-holomorphes

Cet appendice ne prétend être qu'une introduction aux résultats de Gromov. Pour les démonstrations et la discussion des principales idées, nous renvoyons à [G],[P].

Rappelons qu'une structure presque complexe sur une variété M, est la donnée d'un champ d'endomorphismes du fibré tangent, J, de carré -1. Une courbe pseudo-holomorphe dans une telle variété, est alors une surface réelle dont l'espace tangent est stable par J.

Le théorème de Gromov est alors un théorème de compacité pour les courbes pseudo-holomorphes d'aire bornée et qui convergent modulo l'apparition de "bulles". Pour donner une formulation plus précise à ce résultat, nous avons besoin de la

5.1 Définition. Une *J-courbe nodale* dans (M, J) est la donnée d'une réunion disjointe de surfaces de Riemann Σ_i, d'une identification d'un nombre fini de points (appelés *noeuds*) et d'une application pseudo-holomorphe $f : \cup_i \Sigma_i \to (M, J)$ qui respecte les noeuds.

Il nous faut également munir l'ensemble des courbes nodales d'une topologie

5.2 Définition. Soit $f : \cup_i \Sigma_i \to M$ une J-courbe nodale. Un élément d'une base d'ouverts de la *topologie C^∞ sur les courbes nodales* est déterminé par le choix

(a) d'un voisinage U des noeuds
(b) d'un réel ϵ positif,
(c) d'un voisinage W de f pour la topologie C^∞ sur les applications de $\cup_i \Sigma_i \backslash U$ dans M,
(d) d'un voisinage V de J_Σ pour la topologie C^∞ sur structures presque complexes de $\cup_i \Sigma_i \setminus U$.

C'est l'ensemble des courbes nodales $g : \cup_j S_j \to M$ telles qu'il existe une application continue

$$\sigma : \cup_j S_j \to \cup_i \Sigma_i$$

qui est un difféomorphisme sauf au dessus des noeuds, pour lesquels, si x est un noeud, $\sigma^{-1}(x)$ est une courbe fermée simple ou un noeud. Cette application doit de plus vérifier:

(i) $\mid aire(f) - aire(g) \mid < \epsilon$,
(ii) $g \circ \sigma^{-1}$ appartient à W,
(iii) $\sigma_*^{-1} J_S$ appartient à V,
(iv) enfin, $g(\cup_j Sj)$ est ϵ proche de $f(\cup_i \Sigma_i)$ pour la distance de Haussdorff.

Autrement dit au voisinage de deux sphères attachées en un point on peut trouver une sphère étranglée. Soulignons que, d'une part, la convergence pour cette topologie implique la convergence de Haussdorf des images, d'autre part, au voisinage d'une vraie courbe pseudo-holomorphe, on ne trouve que des vraies courbes pseudo-holomorphes, et la convergence est alors la convergence C^∞ des paramétrisations.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de compacité de Gromov:

5.3 THÉORÈME. (Gromov) *Soit M une variété riemanienne munie d'une suite de structures presque complexes J_n convergeant C^∞ vers J_0. De toute suite de courbes J_n-pseudo-holomorphes $f_n : S \to M$, on peut extraire une sous-suite convergeant dans C^∞ vers une J_0-courbe nodale $f : \cup_l \Sigma_l \to M$.*

Topologiquement $S = \cup_l \Sigma_l$ modulo un nombre fini de courbes simples écrasées sur un point. En particulier le genre ne peut que décroître:

$$\sum_l g(\Sigma_l) \leq g(S).$$

Le théorème reste vrai si l'on demande simplement que les structures presque complexes soient définies sur un sous-fibré tangent à M et que les courbes pseudo-holomorphes soient tangentes à ce sous-fibré.

Enfin, une topologie C^k est définie également pour les courbes nodales et un théorème de compacité s'énonce aussi pour cette topologie.

[B] M.S.BERGER, *Riemaniannian Structure of prescibed Gaussian Curvature for compact 2-Manifolds,*, J. of Diff. Geom., 5 (1971), pp 325-332.

[C.E.G.] R.D.CANARY, D.B.A.EPSTEIN, P.GREEN, *Notes on notes of Thurston,* in "Analytical and geometric aspects of hyperbolic spaces," London Mathematical Society lecture Notes 111, (D.B.A.Epstein ed.), Cambridge University Press, Cambridge (1987), pp.3-92

[D] P.DELANOË, *Plongements radiaux à courbure de Gauss positive prescrite,* Ann.scient.Ec.Norm.Sup.,4e série,t. 18 (1985), pp.635-649

[G] M.GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in almost complex manifolds-*, Invent. Math. 82, (1985), pp. 307-347

[B.G.S] W.BALLMAN,M.GROMOV,V.SCHROEDER, *Manifolds of non-positive-curvature,* Birkhauser studies (1985)

[H] R.S.HAMILTON, *The inverse function theorem of Nash and Moser,* Bull A.M.S. (New series), vol 7, No 1 (1982), pp. 65-222

[L1] LABOURIE, *Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes,* preprint, à paraître dans Jour. of Diff. Geom.

[L2] Labourie, *Surfaces convexes dans l'espace hyperboliques et* $\mathbf{CP}^1$*-structures,* preprint

[M] J.W.Morgan, *Uniformization theorem for 3-dimensional manifolds,* - chapter 5 in Proceedings on the Smith Conjecture Symposium, ed. J.W.Morgan and H.Bass, Academic Press 1984

[N] L.Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problem in differential geometry in the large,* Comm. Pure Appl. Math., vol 6, No 3 (1953), pp. 337-394.

[O] V.I.Oliker, *Hypersurfaces in* $\mathbf{R}^{n+1}$ *with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge-Ampère type,* Comm. P.D.E.,vol 9,No 8 (1984), pp 807-838

[P] P.Pansu, *Notes sur la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov,* preprint, à paraître

[Po] A.V.Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces,* Israel program for scientific translation, Jerusalem (1973).

[S] M.Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry* , - Publish or Perish, Boston (1975).

[T] Thurston, *Geometry and topology of 3-manifolds,* ch.8, mimeographic notes

François Labourie
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau (Cedex)
URA D.0169 du C.N.R.S.