C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 493-496, 1987

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Bifurcation secondaire de solutions quasi périodiques pour le problème de Couette-Taylor. Calcul effectif de la forme normale

Patrice LAURE

Résumé — On considère le problème de Couette-Taylor au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée, pour laquelle il est nécessaire de calculer la forme normale du système réduit sur la variété centrale jusqu'à l'ordre 7. On décrit une méthode permettant de calculer ces termes en utilisant les outils de calcul formel. On montre ainsi l'existence d'un nouvel écoulement quasi périodique malheureusement instable pour les valeurs des paramètres considérées.

Secondary bifurcations of quasi-periodic solutions in the Couette-Taylor problem. Computation of the normal form

Abstract — *We consider the Couette-Taylor problem at the neighbourhood of degenerated Hopf bifurcation, for which it is necessary to compute the seventh order terms in the normal form of the system on the center manifold. We describe a method which allows to compute these terms using symbolic calculus. So, we show the existence of new type of quasi-periodic flow, unfortunately unstable for the specified values of the parameters.*

1. POSITION DU PROBLÈME. — 1.1. *Le Problème de Couette-Taylor.* — On rappelle brièvement les résultats exposés dans les références [1]-[3]. Le problème concerne un fluide visqueux incompressible se trouvant entre deux cylindres de rayons R_1 et R_2, et ayant pour vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2. Si on note $\mathcal{R}=\Omega_1 R_1^2/\nu$ le nombre de Reynolds, où ν est la viscosité cinématique, la première solution observée pour $\mathcal{R}$ assez petit est la solution de Couette purement azimutale. Les paramètres du problème sont $\mathcal{R}$, $a=R_2/R_1$ et $\omega=\Omega_2/\Omega_1$.

La perturbation U de l'écoulement de Couette, satisfait l'équation non dimensionalisée suivante (U est dans un espace de Hilbert approprié contenant les conditions aux limites et la condition de divergence nulle) :

$$(1)\qquad \frac{dU}{dt}=L_0(U)+\mu L_1(U)+M(U, U)\qquad \text{avec}\quad \mu=\frac{1}{\mathcal{R}_c}-\frac{1}{\mathcal{R}},$$

où les opérateurs linéaires L_0 et L_1, et l'opérateur quadratique M sont définis en référence [2] ou [7]. $\mathcal{R}_c$ est le nombre de Reynolds critique pour lequel des valeurs propres de l'opérateur L_μ (i. e. $L_0+\mu L_1$) traversent l'axe des imaginaires purs pour $\mu=0$.

Les opérateurs L_μ et M étant équivariants sous l'action du groupe $SO(2)\times O(2)$ [1], on cherche des vecteurs propres de L_μ de la forme

$$(2)\qquad U(r, \theta, z)=U(r)\,e^{i(\alpha z+m\theta)}\qquad \text{où}\quad \alpha\in\mathbb{R}\quad \text{et}\quad m\in\mathbb{N}.$$

On montre numériquement que pour un rapport d'aspect $a=R_2/R_1$ donné, il existe une valeur $\omega^{(0)}<0$ telle que pour tout $\omega=\Omega_2/\Omega_1<\omega^{(0)}$, on a $m>0$. Dans ce cas, L_0 a quatre vecteurs propres associés aux valeurs propres imaginaires pures $\pm i\omega_0$ [2], qui seront notés U_1, $U_2=SU_1$, $\bar U_1$ et $\bar U_2$ [S étant la représentation de la symétrie par rapport au plan XOY $(z\rightarrow -z)$].

1.2. *Équation sur la variété centrale.* — Pour étudier la solution du problème de Cauchy associé à (1) pour μ voisin de 0, on considère cette équation sur la variété

Note présentée par Paul GERMAIN.

0249-6291/87/03050493 $ 2.00

centrale (ici de dimension 4). Le développement de Taylor de la solution au voisinage de $\mu=0$ et $U=0$ s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} U = \sum_{p+q+r+l+n\geq 1} \mu^p z_1^q \bar{z}_1^r z_2^l \bar{z}_2^n \Phi_{pqrln}, \\ \Phi_{p0000}=0, \quad \Phi_{01000}=U_1, \quad \Phi_{00100}=\bar{U}_1, \quad \Phi_{00010}=U_2, \quad \Phi_{00001}=\bar{U}_2 \\ \Phi_{pqrln}=0 \quad \text{si} \quad p<0 \quad \text{ou} \quad q<0 \quad \text{ou} \quad r<0 \quad \text{ou} \quad 1<0 \quad \text{ou} \quad n<0. \end{cases}$$

Les propriétés d'invariance [1] entraînent que la trace sur la variété centrale de l'équation (1) s'écrit directement sous forme normale [6]

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = i\,\omega_0\, z_1 + z_1 \Big(\sum_{k+j+o\geq 1} \alpha_{kjo}\, \mu^k\, |z_1|^{2j} |z_2|^{2o} \Big) \\ \dfrac{dz_2}{dt} = i\,\omega_0\, z_2 + z_2 \Big(\sum_{k+j+o\geq 1} \alpha_{kjo}\, \mu^k\, |z_2|^{2j} |z_1|^{2o} \Big) \end{cases}$$

1.3. *Les solutions bifurquées et leur stabilité.* — On écrit le système (4) en utilisant les coodonnées polaires avec $z_1=r_1\, e^{i\varphi_1}$ et $z_2=r_2\, e^{i\varphi_2}$. On considère le système vérifié par les coordonnées radiales r_1 et r_2 (découplées des variables angulaires) :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dr_1}{dt} = f(\mu, r_1, r_2) = r_1 (a_0\, \mu + b r_1^2 + c r_2^2 + d r_1^4 + e r_1^2 r_2^2 + f r_2^4 \\ \qquad\qquad + g r_1^6 + h r_1^4 r_2^2 + k r_1^2 r_2^4 + l r_2^6 + \dots) \\ \dfrac{dr_2}{dt} = f(\mu, r_2, r_1) \end{cases}$$

où on a noté $a_0=\mathrm{Re}(\alpha_{110})$, $b=\mathrm{Re}(\alpha_{010})$, $c=\mathrm{Re}(\alpha_{001})$, etc.

Les travaux [4] et [5] ont étudié de façon systématique les bifurcations de Hopf dégénérées avec la symétrie O(2). Une de ces dégénérescences, $b=c$, a été mise en évidence numériquement dans [2] pour les valeurs des paramètres $\mathcal{R}_c=487{,}50$, $\omega_c\sim -0{,}93$ et $a=1{,}33$. On a dans ce cas, au voisinage des valeurs critiques $\mathcal{R}_c$ et ω_c, une singularité de codimension 2. Pour plus de commodité on utilisera pour les calculs le paramètre $\nu=c-b$ [puisqu'on a, par construction, $\nu(\omega_c)=0$ et ν qui varie dans le même sens que ω]. Il existe en général deux formes de solutions, soit des ondes rotatives du type « spirales » pour $r_1=r$, $r_2=0$, $\varphi_1\sim\omega_0\, t$ (ou la solution symétrique) et $\mu\sim -b/a_0\, r^2$ (qu'on appellera pour simplifier « solution I »), soit des ondes stationnaires du type « rubans » pour $r_1=r_2=r$, φ_1 et $\varphi_2\sim\omega_0\, t$ et $\mu\sim -2\, b/a_0\, r^2$ (solution II). La stabilité de ces solutions est donnée par le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne du système (5), où c est remplacé par $b+\nu$. Au voisinage de $(\mu, \nu)=(0, 0)$, une de ces valeurs propres s'annule aussi bien pour la solution I que pour la solution II, pour μ égal à $\mu_1(\nu)$ et $\mu_2(\nu)$ respectivement. Un calcul simple ([4] ou [8]) donne

$$(6)\quad \mu_1(\nu) = -b\,\frac{\nu}{a_0\,(d-f)} + O(\nu^2) \qquad \text{et} \qquad \mu_2(\nu)-\mu_1(\nu) = \frac{q_0}{4\,a_0}\left(\frac{\nu}{d-f}\right)^2 + O(|\nu|^3).$$

De plus, une solution quasi périodique peut apparaître, elle est définie avec $s=r_1^2+r_2^2$, $p=r_1^2 r_2^2$ par

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
s &= \frac{(f-e+d)\,\nu+\mu\, a_0\,(-1+k-h+g)}{(d-f)\,q_0}+O\,(\nu^2+\mu^2),\\
p &= \frac{b\nu+a_0\,\mu\,(d-f)}{(d-f)\,q_0}+O\,(\nu^2+\mu^2) \quad \text{où} \quad q_0=d-e+f-\frac{b\,(g-h+k-l)}{(d-f)}
\end{aligned}
\right.
$$

En exprimant les conditions d'existence de cette solution (i. e. $s>0$, $p>0$ et $s^2-4\,p>0$), on montre qu'elle peut exister pour μ compris entre $\mu_1(\nu)$ et $\mu_2(\nu)$. De plus, elle est stable si $q_0\,(d-f)<0$ et $b<0$ ([4] et [8]).

Les calculs effectués pour $a=1{,}333$ et $\omega=-0{,}93$ donnent $q_0=6{,}02.10^7$, $d-f=1{,}9.10^7$ et $b=-0{,}39.10^3$. Dans ce cas, les solutions de type I et II existent et peuvent être stables pour $\mu>0$, mais la solution quasi périodique est instable.

Les diagrammes de phase du système (5) dans le plan (ν, μ) sont tracés en référence [8]. On montre ainsi que pour $\nu>0$, la solution quasi périodique instable connecte la solution II stable à la solution I stable. On a ainsi un phénomène d'hystérésis.

La présence dans q_0 des coefficients g, h, k et l nécessite le calcul des termes d'*ordre* 7 de (5). Une méthode permettant de calculer numériquement ces coefficients est indiquée dans la suite.

2. Calcul effectifs de la forme normale. — 2.1. *Ordonnancement des calculs.* — Pour pouvoir calculer les coefficients fondamentaux α_{kjo} intervenant dans le système (4), on identifie les puissances de $\mu^p z_1^q \bar{z}_1^r z_2^l \bar{z}_2^n$ dans (1), où U vérifie (3). On obtient pour chaque monôme $\mu^p z_1^q \bar{z}_1^r z_2^l \bar{z}_2^n$ un système différentiel de la forme :

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & \mathrm{L}_0(\Phi_{pqrln})-(q-r+l-n)\,i\,\omega_0\,\Phi_{pqrln}\\
&= -\mathrm{L}_l(\Phi_{p-1,\,qrln})-\sum_{p_1+p_2=p}\ \sum_{q_1+q_2=q}\ \sum_{r_1+r_2=r}\ \sum_{l_1+l_2=l}\ \sum_{n_1+n_2=l} \mathrm{M}\,(\Phi_{p_1q_1r_1l_1n_1}, \Phi_{p_2q_2r_2l_2n_2})\\
&\quad + \sum_{k_1+j_1+o_1\geqq 1} [(q-j_1)\,\alpha_{k_1j_1o_1}+(r-j_1)\,\bar{\alpha}_{k_1j_1o_1}\\
&\quad\quad +(l-o_1)\,\alpha_{k_1o_1j_1}+(n-o_1)\,\bar{\alpha}_{k_1o_1j_1}]\,\Phi_{p-k_1,\,q-j_1,\,r-j_1,\,l-o_1,\,n-o_1}
\end{aligned}
$$

où

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Phi_{pqrln}=\Phi_{pqrln}(r)\,e^{i\,((q-r+l-n)\alpha z+(q-r-l+n)\,m\theta)},\\
&\Phi_{pqrln}=\bar{\Phi}_{prqnl}, \qquad \Phi_{pqrln}=\mathrm{S}\,\Phi_{plnqr}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le coefficient α_{kjo} est calculé en résolvant l'équation (8) pour (p, q, r, l, n) égal à $(k, j+1, j, o, o)$, car il intervient pour réaliser la condition de compatibilité du second membre puisque l'opérateur $\mathrm{L}_0-i\,\omega_0\,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. On montre de plus que pour calculer le second membre de l'équation (8) pour le quintuplet (p, q, r, l, n), il faut auparavant connaître les champs de vecteurs $\Phi_{p'q'l'n'}$ et les coefficients $\alpha_{p'r'l'}$ tels que $(p', q', r', l', n')\ll(p, q, r, l, n)$ c'est-à-dire

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(0\leqq p'\leqq p,\ 0\leqq q'\leqq q,\ 0\leqq r'\leqq r,\ 0\leqq l'\leqq l,\ 0\leqq n'\leqq n \text{ et } 0<q'+r'+l'+n'<q+r+l+n)\\
&\text{ou}\\
&(0\leqq p'<p,\ q'=q,\ r'=r,\ l'=l,\ n'=n \text{ et } 0<q'+r'+n'+l').
\end{aligned}
\right.
$$

On peut établir ainsi que l'on doit déterminer 214 vecteurs Φ_{pqrln} pour étudier la stabilité de la solution quasi périodique. Mais grâce aux propriétés (9), on résoudra l'équation (8) seulement pour les quintuplets (p, q, r, l, n) vérifiant la condition suivante :

$$(11) \qquad (q+r \geqq l+n) \quad \text{et} \quad (q>r \text{ ou } (q=r \text{ et } l \geqq n)).$$

2.2. *Utilisation d'un système de calcul symbolique* (*Macsyma*). — Puisque le calcul numérique des coefficients se heurte à la complexité rapidement croissante de l'expression algébrique (8), on a utilisé le calcul symbolique. Dans cette partie on va décrire brièvement la méthode utilisée. Pour plus d'information sur les programmes Macsyma écrits, on regardera [7] (où on a étudié de la même façon une bifurcation stationnaire dégénérée pour Couette-Taylor) et [8].

Le processus itératif [lié à la relation d'ordre (10)] décrit dans le paragraphe précédent, permet d'obtenir dans l'ordre de résolution les équations (8) donnant le coefficient α_{kjo} de la forme normale. La forme algébrique développée de l'équation (8) pour tout quintuplet (p, q, r, l, n), sera obtenue en utilisant les possibilités des systèmes de calcul formel concernant la manipulation des polynômes et la prise en compte de la linéarité et de la commutativité d'opérateurs. Finalement pour obtenir le code Fortran, l'idée principale consiste à créer une fonction « *écrire équation* (8) *pour* (p, q, r, l, n) », qui écrira dans un fichier les appels aux sous-programmes Fortran résolvant numériquement cette équation, au lieu d'afficher à l'écran sa forme développée.

On peut mettre en évidence huit opérations de base (L_0, M, L_1, somme, conjugaison, multiplication par un scalaire, etc.) qui correspondent aux principales opérations formelles sur les champs de vecteurs Φ. A ces opérations de base, on associe un sous-programme Fortran, ainsi la fonction *écrire équation* (8) correspondra à des boucles de la forme :

pour i : —à — faire CALL (nom du sous-programme, liste des paramètres).

Les sous-programmes Fortran manipulés ont été écrits en utilisant largement les programmes de Y. Demay [2].

L'automatisation de l'écriture du code Fortran a donc rendu possible le calcul de coefficients que l'on n'aurait pas pu obtenir par une démarche classique.

Note reçue le 11 mai 1987, acceptée le 24 juillet 1987.

Références bibliographiques

[1] P. Chossat et G. Iooss, Primary and secondary bifurcations in the Couette-Taylor problem, *Japan J. of Applied Math.*, 2, n° 1, 1985, p. 37-68.

[2] Y. Demay et G. Iooss, Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette-Taylor avec les deux cylindres en rotation, *J. de Méca. théorique et appliquée*, numéro spécial, 1984, p. 193-216.

[3] C. D. Andereck, S. S. Liu et H. L. Swinney, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, 164, 1986, p. 155-183.

[4] W. Nagata, *Unfoldings of degenerate Hopf bifurcations with* O(2) *symmetry*, Preprint, 1985.

[5] P. Chossat, Bifurcation secondaire de solutions quasi-périodiques dans le problème de bifurcation de Hopf invariant par symétrie O(2), *C.R. Acad. Sci. Paris*, 302, série I, 1986, p. 539-541.

[6] C. Elphick, E. Tirapegui, M.-A. Brachet, P. Coulet et G. Iooss, A simple global characterisation for normal forms of singular vector fields, *Physica D* (à paraître).

[7] P. Laure et Y. Demay, Symbolic computation and equation on the center manifold: application to the Couette-Taylor problem, *Computers and Fluids*, novembre 86 (soumis).

[8] P. Laure, Calcul effectif de bifurcations avec rupture de symétrie en hydrodynamique, *Thèse*, Univ. de Nice, février 1987.

Université de Nice, Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.