**Correction 0 : un peu de mathématique.**

**Ex 1** *Calcul de la solution d'une edo*

**1)**
On cherche une solution polynômiale de la forme

$$u(x) = ax^2 + bx + c$$

qui vérifie l'équation et les conditions aux limites. Ce qui donne

$$\begin{cases} -2a & = & 1 \\ c & = & 0 \\ 2a + b & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

et finalement

$$u(x) = x\left(-\frac{x}{2} + 1\right) \tag{2}$$

**2)** On discrétise sur $N = 5$ points $(x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 2/3, x_5 = 1)$. On a les relations suivantes avec $\Delta_x = 1/4$ :

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0 \\ -u_1 + 2\ u_2 - u_3 & = & \Delta_x^2 \\ -u_2 + 2\ u_3 - u_4 & = & \Delta_x^2 \\ -u_3 + 2\ u_4 - u_5 & = & \Delta_x^2 \\ u_3 - 4\ u_4 + 3\ u_5 & = & 0 \end{array}$$

où on a approché $u'(1)$ par $\frac{3u_5 - 4u_4 + u_3}{2\Delta_x}$.
On doit finalement résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/16 \\ 1/16 \\ 1/16 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

ce qui donne

$$u_1 = 0\,;\ u_2 = 7/32\,;\ u_3 = 3/8\ ;\ u_4 = 15/32\,;\ u_5 = 1/2.$$

On peut vérifier que ces valeurs correspondent à la solution (2).
On a la valeur exacte car l'approximation des dérivées par des différences finies d'ordre 2 est exacte pour un polynôme d'ordre 2.

**3)** Les fonctions tests sont des polynômes de degré 1 qui valent 1 en un point $x_i$ et zéro sur les autres (voir la figure 1). On peut les définir par,

$$\begin{array}{llll} \phi_i(x) & = 0 & & x < x_{i-1} \\ \phi_i(x) & = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x < x_i & \\ \phi_i(x) & = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \quad < x < x_{i+1} & \\ \phi_i(x) & = 0 & x_{i+1} < x & \end{array}$$

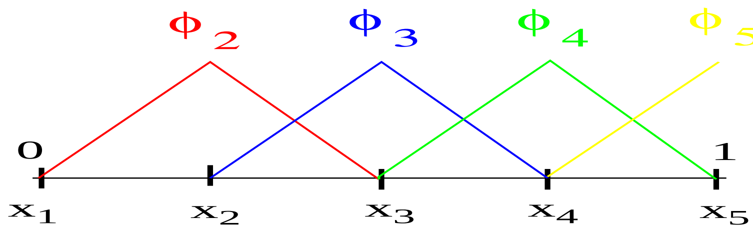


FIG. 1 – Schéma montrant les 5 fonctions tests.

Par exemple

$$\phi_2(x) = 4x \quad \text{pour} \quad x < 1/4 \quad \text{et} \quad \phi_2(x) = 2(1-2x) \quad \text{pour} \quad 1/4 < x < 1/2 \quad \text{et zéro ailleurs}$$

La solution approchée est de la forme $u = \sum_{j=2}^{5} u_j \phi_j$ puisque les conditions aux limites impose $u_1 = 0$. La formulation faible s'écrit

$$\int_0^1 u \ v \ dx = \int_0^1 v \ dx$$

où $v$ appartient à la base des fonctions tests. on a donc

$$\sum_{j=2}^{4} u_i \int_0^1 \phi_j' \phi_i' \ dx = \int_0^1 \phi_i \ dx$$

On a par exemple

$$\int_0^1 \phi_2' \phi_2' dx = \int_0^{1/2} 16 \ dx = 8$$

$$\int_0^1 \phi_2 \ dx = \int_0^{1/4} 4x \ dx + \int_{1/4}^{1/2} 2(1-2x) \ dx = 1/4$$

$$\int_0^1 \phi_2' \phi_3' \ dx = \int_{1/4}^{1/2} (-16) \ dx = -4$$

$$\int_0^1 \phi_5' \phi_5' \ dx = \int_{3/4}^{1} 16 \ dx = 4$$

$$\int_0^1 \phi_4' \phi_5' \ dx = \int_{3/4}^{1} (-16) \ dx = -4$$

On a finalement le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ce système est le même que celui obtenue en (3). La dernière ligne de (4) est équivalente à la somme des deux dernières lignes de (3).

**Ex 2** *Les polynômes de Lagrange*

**1)**

(a) La surface de ce triangle est égal à

$$S = \int_{x=0}^{1} \left[ \int_0^{1-x} dy \right] dx = \int_{x=0}^{1} (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

(b) Par exemple pour la première fonction, on écrit $L_1(x,y) = a + bx + cy$ et on doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{lllll} a & & & = & 1 \\ a & +b & & = & 0 \\ a & & +c & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne $L_1(x,y) = 1 - x - y$. De la même façon, on trouve $L_2(x,y) = x$ et $L_3(x,y) = y$.

**2)**
On trouve $\int\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} L_i \; dx \; dy = \frac{1}{6}$

**3)**
(a) Si $(\xi, \eta)$ sont les coordonnées dans le triangle de référence, on a

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{3} (x_i, y_i) L_i(\xi, \eta)$$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\xi-\eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 \\ (1-\xi-\eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 \end{pmatrix}$$

(b) On utilise la formule qui permet de changer de coordonnée

$$S = \int_R dx \; dy = \int_{T^{-1}(R)} |J(T)| \; d\xi \; d\eta$$

La matrice Jacobienne de la transformation s'écrit

$$J(T) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{array}\right]$$

et donc $|J(T)| = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ qui ne dépend pas de $\xi$ et $\eta$. Finalement

$$S = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$$

**4)**
(a) On a bien par contruction que $\hat{U}(A_i) = U_i$.
(b)

$$\int\int_{T_{ref}} \hat{U}(x,y) \; dx \; dy = \sum_i U_i \int\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} L_i \; dx \; dy = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{3} \times \frac{1}{2}$$

(c)

$$= \int\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} \hat{U}(\xi, \eta)|J(T)| \; d\xi \; d\eta = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{3} \frac{|J(T)|}{2} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{3} \times \text{ aire de } T_{ge}$$

On a remplacé $U(x,y)$ par sa valeur moyenne à l'intérieur du triangle

$$\int\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} U(x,y) \; dx \; dy \sim \frac{U_1 + U_2 + U_3}{3} \times \text{ aire de } T_{ge}$$

**5)**
(a) On a les 4 triangles suivant définies à partir des sommet $S_1 = (0,0)$, $S_2 = (1,0)$, $S_3 = (1,1)$, $S_4 = (0,1)$ et $S_5 = (1/2, 1/2)$ (voir Figure 2)

- $T_1$ dont les sommets sont $S_1, \; S_2, \; S_5$.
- $T_2$ dont les sommets sont $S_2, \; S_3, \; S_5$.
- $T_3$ dont les sommets sont $S_3, \; S_4, \; S_5$.
- $T_4$ dont les sommets sont $S_4, \; S_1, \; S_5$.

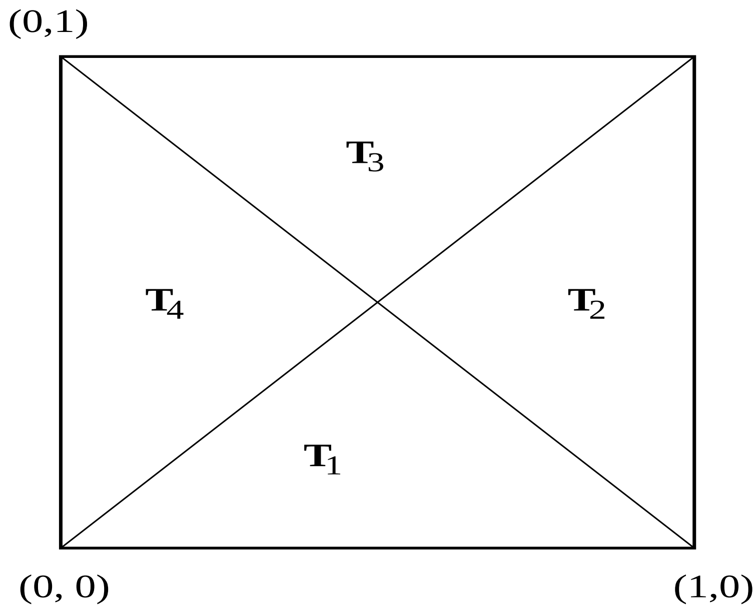


FIG. 2 – Triangulation du carré.

Comme chaque triangle a la même surface $I_T = 1/4 =$ (surface du carré)/4.
(b) La fonction $U$ a pour valeurs en ces 5 points ($U_i = U(S_i)$) : $U_1 = 0$, $U_2 = 1$, $U_3 = 2$, $U_4 = 1$ et $U_5 = 1$, donc

$$\int\int_{\text{carré}} U(x,y)dx\ dy = \sum_1^4 \int\int_{\mathbf{T}_i} U(x,y)dxdy = I_T \frac{2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + 2U_4 + 4U_5}{3} = \frac{1}{4}\frac{12}{3} = 1$$

(c) La formule permettant d'avoir une valeur approchée de la fonction $U$ sur un triangle, suppose que l'on peut remplacer la fonction $U$ par un polynôme du premier degré en $x$ et $y$. Dans notre cas, on a $\hat{U} = U$ sur chaque triangle, donc avec cette formule, on obtient l'intégrale exacte.