Séance 0 : un peu de mathématique

Ex 1 *Calcul de la solution d'une edo*

On considére l'équation sur l'intervalle $[0,1]$:

$$-u'' = 1$$
$$u(0) = u'(1) = 0$$

On va calculer la solution de cette équation sur $n = 5$ points équidistants.
1) Trouver la solution exacte du problème.
2) Résoudre en utilisant les différences finies et l'approximation

$$u'' = \frac{u_{i+1} - 2\ u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} \qquad \text{avec} \qquad \Delta_x = 1/(n-1).$$

- Trouver une approximation de la dérivée première de u en $x = 1$ qui soit aussi d'ordre 2.
- Donner le système qui permet de calculer u sur les x_i , $1 \leq i \leq 5$.

3) Résoudre en utilisant les éléments finis d'ordre $\mathbf{P_1}$.
- Donner la base des fonctions tests.
- Ecrire la matrice qui permet d'obtenir la valeur de u sur les 5 points.

Ex 2 *Les polynômes de Lagrange*

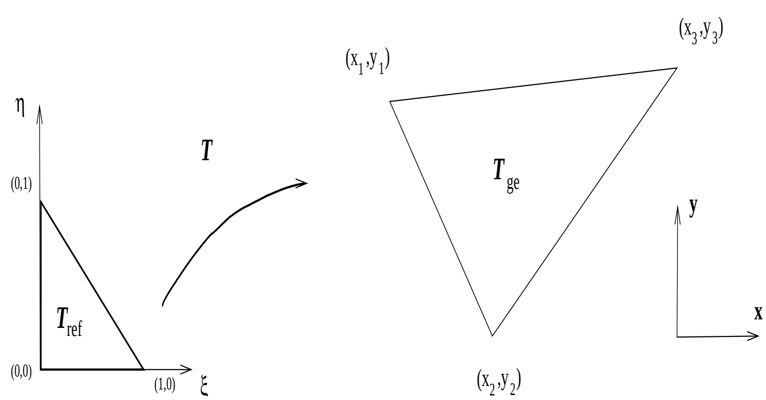

FIG. 1 – Schéma montrant $\mathbf{T}_{\text{ref}}$, $\mathbf{T}_{\text{ge}}$ et la transformation $\mathbf{T}$ permettant de passer de l'un à l'autre.

1) On considère un triangle de référence, $\mathbf{T}_{\text{ref}}$, formé par les trois points $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$ et $A_3 = (0,1)$ (voir Figure 1).

(a) Calculer l'aire de ce triangle.
(b) Trouver les 3 fonctions affines L_i tel que $L_i(A_j) = \delta_{ij}$. C'est les fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre 1.
2) Sur le triangle $\mathbf{T}_{\text{ref}}$, calculer $\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} L_i\ dx\ dy$.

3) On considère un triangle, T_{ge} formé par les trois points $B_1 = (x_1, y_1)$, $B_2 = (x_2, y_2)$ et $B_3 = (x_3, y_3)$.
(a) Trouvez une transformation linéaire T qui permet de passer du triangle de référence à ce triangle (on

utilise les fonctions L_i de la question précédente).
(b) Calculez l'aire de ce nouveau triangle en utilisant ce changement de coordonnée.

4) Soit une fonction $U(x,y)$, on approche sur $\mathbf{T}_{\text{ref}}$ cette fonction par la fonction $\hat{U}(x,y)$ définie de la façon suivante :

$$\hat{U} = a + bx + cy \quad \text{et} \quad \hat{U}(A_i) = U(A_i) = U_i$$

(a) Montrer que $\hat{U} = U_1 L_1(x,y) + U_2 L_2(x,y) + U_3 L_3(x,y)$ (Les fonctions L_i ont été trouvées en **1)**).
(b) Calculer $\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} \hat{U}(x,y)\ dx\ dy$.
(c) En déduire l'intégrale de $\hat{U}$ sur le triangle $\mathbf{T}_{\text{ge}}$ (maintenant $\hat{U}(B_i) = U(B_i) = U_i$). En remarquant que cette formule donne une approximation de l'intégrale de $U(x,y)$ sur le triangle $\mathbf{T}_{\text{ge}}$, comment est approché $U(x,y)$ sur cette surface.

5) On considére un carré $0 \leq x, y \leq 1$.
(a) Découper ce carré en 4 triangles égaux.
(b) Soit $U(x,y) = x + y$, calculer l'intégrale de $U(x,y)$ sur le carré, en utilisant la formule d'approximation de la question **4)** sur les 4 triangles.
(c) Comparer avec la valeur réelle de l'intégrale de U sur le carré. Expliquer le résultat.