

**Séance 3 : Initiation aux éléments finis 2D**

Pour pouvoir faire ce TD facilement, il faut prendre à l'adresse

<http://www.inln.cnrs.fr/~laure/EF/TD1/Seance3/index.html>

les fichiers suivant :

- `Q1.sci`, `Q2.sci`, `P1.sci`; fonctions qui donne les fonctions de Lagrange pour les éléments  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  et  $\mathbf{P}_1$ .
- `gauss.sci`; une fonction qui donne les points de Gauss pour l'intégration numérique.
- `maillage_2D?.sci`; des fonctions qui donnent le maillage d'un carré par des quadrangles et des triangles.
- `cal_indice.sci`, `interp1.sci`, `trace_maillage_2D.sci`, `trace_u_2D.sci`; des fonctions qui permettent de tracer le maillage et la solution  $u$ .

On va utiliser le fichier `seance3.sci` qui devrait ressembler au programme écrit à la deuxième séance. Les instructions d'assemblage ont été légèrement modifier pour tenir compte de la structure creuse de la matrice globale. Le travail consistera à ajouter les instructions permettant de calculer le système élémentaire pour un problème bidimensionnel.

**Ex 1** *Écoulements de Poiseuille*

On veut résoudre

$$-\Delta u = 1 \quad \text{sur un carré} \quad [0, 1] \times [0, 1]$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad (1)$$

en utilisant des éléments  $\mathbf{Q}_2$  (programme `Q2.sci`).

- 1) Ecrire la forme variationnelle de l'équation et le système élémentaire à résoudre sur chaque élément.
- 2) On utilise des quadrilatères comme éléments (cf. `maillage_2D.sci` et `trace_maillage_2D.sci` pour tracer ce maillage). Détailler le calcul de la matrice jacobienne qui correspond à la transformation linéaire du quadrilatère de référence vers un quadrilatère quelconque. Ecrire les instructions correspondantes.
- 3) La matrice `CONNEC` et le vecteur `COOR` sont donnés par la fonction `maillage_2D.sci`. La matrice `ADDRESS` et le vecteur `NUMER` sont calculés pour les conditions aux limites (1) dans le fichier `seance3.sci`. Ecrire les instructions qui permettent de calculer le système élémentaire (les matrices `A_e1` et `F_e1`) en complétant le fichier `seance3.sci`.
- 4) Ecrire une fonction scilab qui calcule le débit de la solution  $u$  (c'est à dire  $\int_0^1 \int_0^1 u \, dx \, dy$ )
- 5) Modifier le calcul de `NUMER` pour avoir des conditions de Neumann pour  $x = 0$  et  $x = 1$ . Vérifier que la solution trouvée ne dépend pas de  $x$  et est égal à  $u(y) = y(1 - y)/2$ .

**Ex 2** *Solution analytique*

Pour tester les différents maillages, on résoud un problème pour lequel on connaît une solution analytique. On considère l'équation sur  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

$$-\Delta u + 3u = 0$$

et on peut montrer que  $u(x, y) = e^{2x} \sin(y)$  est une solution si on ajuste correctement les conditions aux limites sur les bords.

1) Ecrire la formulation faible de ce problème.

2) En adaptant les programmes écrits à l'exercice précédents et les différentes fonctions `maillage_2D_?.sci` tester les éléments  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  et  $\mathbf{P}_1$ . On peut comparer l'erreur entre la solution calculée et la solution analytique.