M12

Interrogation 1

2. Pour quelles valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$ est-ce que l'ensemble $S := \{(a,b,c), (a,2b,3c), (a,c,c)\} \subset \mathbb{R}^3$ est libre ?

Réponse : S est libre

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \lambda_1(a,b,c) + \lambda_2(a,2b,3c) + \lambda_3(a,c,c) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0 \right\}$$

Étudions donc le système

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 a + \lambda_3 a = 0 \\ \lambda_1 b + 2\lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \\ \lambda_1 c + 3\lambda_2 c + \lambda_3 c = 0 \end{cases}$$

① $a \neq 0$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1/a}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 b + 2\lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \\ \lambda_1 c + 3\lambda_2 c + \lambda_3 c = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - cL_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - bL_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 b + \lambda_3 (c-b) = 0 \\ 2\lambda_2 c = 0 \end{cases}$$

(1.1) $a \neq 0$ et $c \neq 0$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3/c}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 b + \lambda_3 (c-b) = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 (c-b) = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

(1.1.1) $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $b \neq c$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2/(c-b)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc si $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $b \neq c$, alors l'ensemble S est libre.

(1.1.2) $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $b = c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc si $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $b = c$, l'ensemble S n'est pas libre (car il existe une solution pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$) par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -1)$)

(1.2) $a \neq 0$ et $c = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 b - \lambda_3 b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ b(\lambda_2 - \lambda_3) = 0 \end{cases}$$

Donc si $a \neq 0$ et $c = 0$, l'ensemble S n'est pas libre (car il existe une solution pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$, par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2, 1, 1)$))

(2) $a = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 b + 2\lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \\ \lambda_1 c + 3\lambda_2 c + \lambda_3 c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 b + 2\lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \\ \lambda_1 (c - b) + \lambda_2 (3c - 2b) = 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne n'implique jamais que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc le système a toujours d'autres solutions que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.

En autres mots, le rang de ce système homogène est ≤ 2 et donc la dimension de l'espace des solutions est $\geq \underbrace{\overset{\cancel{\text{rang}}\ \dim \mathbb{R}^3}{\overset{\parallel}{3}} - 2}_{=1}$ et il est donc impossible que seulement $(0,0,0)$ soit une solution.