GROUPES NILPOTENTS ET SÉRIES CENTRALES DESCENDANTES

(stage M1 proposé par Clemens Berger, bureau 606)

Un groupe G est dit *nilpotent* de classe $\leq n$ si tous ses commutateurs de longueurs $n+1$ sont triviaux, c'est-à-dire si

$$[x_0, [x_1, [x_2, \cdots [x_{n-1}, x_n] \cdots]]] = 1 \text{ pour tous } x_0, x_1, \ldots, x_n \in G,$$

où $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Les groupes abéliens sont donc précisément les groupes nilpotents de classe ≤ 1. A tout groupe G on associe une suite décroissante de sous-groupes distingués *(la suite centrale descendante de G)*

$$G \supset [G, G] \supset [G, [G, G]] \supset \cdots$$

en désignant pour un sous-groupe K de G par $[G, K]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[g, k]$ tels que $g \in G$ et $k \in K$.

Les quotients successifs de cette suite centrale descendante sont des groupes abéliens. Le groupe G est nilpotent si et seulement si sa suite centrale descendante est triviale à partir d'un certain rang. Les groupes nilpotents forment donc une généralisation naturelle des groupes abéliens pour laquelle la commutativité du produit est de plus en plus relâchée selon la classe du groupe nilpotent.

Le but de ce stage est de se familiariser avec les groupes nilpotents et leur série centrale descendante. La référence (1) ci-dessous contient une exposition agréable des propriétés de base des groupes nilpotents finis. La référence (2) porte sur le *crochet de Lie* qui existe sur le $\mathbb{Z}$-module gradué formé par les quotients successifs de la série centrale descendante d'un groupe.

Références:

(1) fr.wikiversity.org/wiki/Groupe_(mathématiques)/Groupes_nilpotents

(2) Michel Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup (3) 71 (1954).