Feuille de TD n°1

Exo 1.

1) On a la loi de X.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$

avec a de sorte que $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 1$

soit $21a = 1$

soit $a = \frac{1}{21}$

d'où

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$1/21$	$2/21$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$

par définition

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + 3 \times \frac{3}{21} + 4 \times \frac{4}{21} + 5 \times \frac{5}{21} + 6 \times \frac{6}{21}$$

$$= \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{21}$$

$$= \frac{91}{21}$$

2)

loi de $Y = 1/X$

k	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$
$P(Y=k)$	$1/21$	$2/21$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$

$$P(Y = 1) = P\left(\frac{1}{X} = 1\right) = P(X = 1)$$

donc $\mathbb{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{21} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{21} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{21}$

$+ \frac{1}{5} \times \frac{5}{21} + \frac{1}{6} \times \frac{6}{21}$

$= \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$

$= \frac{6}{21}$

Exo 2 :

On a :

La loi de X est :

k	0	1	2	...	a
$P(X=k)$	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$		$\frac{1}{a+1}$

car loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, a\}$ qui compte $(a+1)$ éléments

$\mathbb{E}[X] = 0 \times \frac{1}{a+1} + 1 \times \frac{1}{a+1} + \dots + a \times \frac{1}{a+1}$

$= \frac{1}{a+1} \times (0 + 1 + 2 + \dots + a)$

or $0 + 1 + 2 + \dots + a = \frac{a \times (a+1)}{2}$

donc $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{a+1} \times \frac{a \times (a+1)}{2}$

$= \frac{a}{2}$

donc si $\mathbb{E}[X] = 6$ alors $\frac{a}{2} = 6$ soit $a = 12$

Exercice 5

1)

On a la loi de X :

k	1	3	5
$P(X=k)$	$7/15$	$5/15$	$3/15$

$P(X=1) = P($de tirer une boule de 1 kg$)$

$= \dfrac{n^b \text{ de façons de tirer une boule de 1 kg}}{n^b \text{ total de tirages possibles}}$

$= \dfrac{\binom{7}{1}}{\binom{15}{1}}$

car il y a 15 boules au total et seulement 7 de 1 kg

donc $P(X=1) = \dfrac{7}{15}$

2) Par définition

$E[X] = 1 \times \dfrac{7}{15} + 3 \times \dfrac{5}{15} + \dfrac{5 \times 3}{15}$

$= \dfrac{7 + 15 + 15}{15} = \dfrac{37}{15}$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

a $E[X^2] = 1^2 \times \dfrac{7}{15} + 3^2 \times \dfrac{5}{15} + 5^2 \times \dfrac{3}{15}$

$= \dfrac{1 \times 7}{15} + \dfrac{9 \times 5}{15} + \dfrac{25 \times 3}{15} = \dfrac{7 + 45 + 75}{15} = \dfrac{127}{15}$

donc $V[X] = \frac{127}{15} - \left(\frac{37}{15}\right)^2 \simeq 2.38$

Exo 6 :

1) On a :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{e} \text{ feu est vert} \\ 0 & \text{si le } i^{e} \text{ feu est orange ou rouge} \end{cases}$$

on a $X_i \sim \mathcal{B}(2/3)$
et les X_i sont indépendants

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
donc $X \sim \mathcal{B}(6 ; 2/3)$

2) On a à la base 3 km à parcourir à 15 km/h.
Il faut donc 1h pour parcourir 15 km, et donc 12 minutes pour parcourir les 3 km.
Il faut ajouter à ces 12 minutes, 1.5 minutes par feu rouge ou orange rencontré
Or le nombre de feux rouges ou oranges est : $6 - X$

donc $T = 12 + 1.5 \times (6 - X)$

$$\begin{aligned} E[T] &= E[12 + 1.5 \times (6 - X)] \\ &= 12 + 1.5 \times E[6 - X] \\ &= 12 + 1.5 \times (6 - E[X]) \end{aligned}$$

or puisque $X \sim \mathcal{B}(6, 2/3)$, on a $E[X] = 6 \times \frac{2}{3} = 4$

donc $E[T] = 12 + 1.5 \times (6 - 4) = 15$

3) Puisque $17 > 15$ et que en moyenne il faut 15 minute pour que l'étudiant arrive au lycée, il est raisonnable de penser que l'étudiant va arriver à l'heure.

$P(T > 17)$ est la probabilité d'arriver en retard

$$
\begin{aligned}
P(T > 17) &= P(12 + 1.5 \times (6 - X) > 17) \\
&= P(1.5 \times (6 - X) > 5) \\
&= P\left(6 - X > \frac{5}{1.5}\right) \\
&= P\left(6 - \frac{5}{1.5} > X\right)
\end{aligned}
$$

a $6 - \frac{5}{1.5} = 2,666$

et X prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

a $P(T > 17) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{6}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\
&+ \binom{6}{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\
&+ \binom{6}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^6 + 6 \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 + 15 \times 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \simeq 0.1
\end{aligned}
$$

Exo 8

1) On doit avoir $0.2 + 0.05 + a + 0.4 = 1$

soit $a = 1 - 0.2 - 0.05 - 0.4$

$a = 0.35$

2) $E[X] = -2 \times 0.2 + 2 \times 0.05 + 3 \times 0.35 + 5 \times 0.4$

$= 2.75$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

a $E[X^2] = (-2)^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.05 + 3^2 \times 0.35 + 5^2 \times 0.4$

$= 14.15$

d'où $V[X] = 14.15 - (2.75)^2$

$= 6.5875$

3) On a $Y = -2X + 5$

On a :

Bi de Y :

$= -2 \times 5 + 5$

k	9	1	-1	-5
$P(X=k)$	0.2	0.05	0.35	0.4

$P(Y=-5) = P(-2X+5=-5)$

$= P(-2X = -10)$

$= P(2X = 10)$

$= P(X = 5)$

$E[Y] = E[-2X+5] = -2E[X] + 5$

$= -2 \times 2.75 + 5 = -0.5$

$$V[Y] = V[-2X+5]$$
$$= V[-2X]$$
$$= (-2)^2 V[X]$$
$$= 4 \times V[X]$$
$$= 26.35$$

4)

loi de $Z = X^2$

k	4	9	25
$P(Z=k)$	0.25	0.35	0.4

$$P(Z=4) = P(X^2=4) = P(X=2 \text{ ou } X=-2)$$
$$= P(X=2) + P(X=-2)$$

$$E[Z] = 4 \times 0.25 + 9 \times 0.35 + 25 \times 0.4$$
$$= 14.11$$

Exo 9 : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(0 \leq X \leq 1.42) = P(X \leq 1.42) - P(X < 0.5)$$
$$= 0.9222 - 0.5$$
$$= 0.4222$$

$$P(-1.37 \leq X \leq 2.01) = P(X \leq 2.01) - P(X < -1.37)$$
$$= P(X \leq 2.01) - P(X > 1.37)$$
$$= P(X \leq 2.01) - (1 - P(X \leq 1.37))$$
$$= 0.9778 - (1 - 0.9147)$$
$$= 0.8925$$

$$P(X \geq 1.13) = 1 - P(X < 1.13)$$
$$= 1 - 0.8708$$
$$= 0.1292$$

Exo 10

$$X \sim \mathcal{N}(5 ; 25) \quad \text{donc} \quad Y = \frac{X-5}{\sqrt{25}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = P\left(-1 \leq Y \leq -\frac{4}{5}\right)$$

$$= P(-1 \leq Y \leq -0.8)$$

$$= P(Y \leq -0.8) - P(Y \leq -1)$$
$$= P(Y \geq 0.8) - P(Y \geq 1)$$
$$= (1 - P(Y < 0.8) - (1 - P(Y < 1))$$
$$= (1 - 0.7881) - (1 - 0.8413)$$
$$= 0.0532$$