Correction devoir maison

Exo 1

1)

Pour chacune des lettres du mot de passe, il y a 26 choix possibles, et comme le choix pour une lettre n'a pas d'influence sur le choix des autres lettres, on a car ordre :

$$n^b \text{ de choix possibles} = 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4$$

2) Maintenant, on impose que les 4 lettres soient différentes et il y a l'ordre des lettres qui est important car CHAT et CATH ne forment pas le même mot de passe par exemple.
Il y a ainsi 26 choix possibles pour la 1° lettre, puis 25 pour la 2ème lettre, 24 pour la 3ème lettre et 23 pour la dernière.

$$n^b \text{ de choix possibles} = 26 \times 25 \times 24 \times 23$$

Exo 2

1) On veut regarder le nombre de façons de prendre 4 parfums au hasard parmi les 10 possibles, sans qu'il n'y ait de notion d'ordre.

$$n^b \text{ de Bts possibles} = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4! \times 6!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 10 \times 3 \times 7$$

$$= 210$$

2) les Bts vont soit être constitués de 4 parfums différents sans la fraise et sans la framboise ou alors de 4 parfums différents dont la fraise ou la framboise

n^b de Bts sans fraise ni framboise : C_8^4 car 4 parfums parmi seulement 8

$$= \frac{8!}{4! \times (8-4)!}$$

$$= \frac{8!}{4! \times 4!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 7 \times 2 \times 5$$

$$= 70$$

n^b de Bts avec soit la fraise, soit la framboise $= C_2^1 \times C_8^3$

choix de la fraise ou de la framboise

choix des 3 autres parfums sauf fraise et framboise

$$= 2 \times \frac{8!}{3! \times (8-3)!}$$

$$= 2 \times \frac{8!}{3!\,5!}$$

$$= 2 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 2 \times 8 \times 7$$

$$= 112$$

donc au total, il y a 182 Bts possibles

3) Si on n'impose plus les 4 parfums différents, il y a donc 10 choix possibles pour chacun des 4 pots, mais sans notion d'ordre

n^b de Bts = tous différents + 2 parfums identiques et les deux autres différents + 2 parfums identiques et 2 autres identiques + 3 parfums identiques + 4 parfums identiques choix des 2 autres parfums — choix du 2° parfum

$$= 210 + C_{10}^{1} \times C_{9}^{2} + C_{10}^{1} \times C_{9}^{1} \times \frac{1}{2}$$

tous différents — choix du parfum qui se répète — choix du 1° parfum — car pas d'ordre

$$+ C_{10}^{1} \times C_{9}^{1} + C_{10}^{1}$$

choix du 1° parfum des 3 pots identiques — choix de l'autre parfum — choix du parfum des 4 pots identiques

$$= 210 + 10 \times \frac{9!}{2! \times (9-2)!} + 10 \times 9 + \frac{10 \times 9}{2} + 10$$

$$= 210 + 10 \times \frac{9!}{2! \times 7!} + 90 + 45 + 10$$

$$= 210 + 10 \times \frac{9 \times 8}{2} + 90 + 45 + 10$$

$$= 210 + 360 + 145$$

$$= 715$$

Exo 3

On a :

A = P(au moins deux personnes parmi n aient la même date d'anniversaire)

= 1 - P(tout le monde est né à des dates différentes)

$$= 1 - \frac{n^b \text{ de cas favorables}}{n^b \text{ de cas total}}$$

n^b de cas total = 365^n car il y a 365 dates possibles pour chacune des n personnes

n^b de cas favorables = $365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - n + 1)$

n^b de dates possibles pour la 1° personne

n^b de dates possibles pour la 2° personne

n^b de dates possibles pour la n° personne

$$= \frac{365!}{(365-n)!}$$

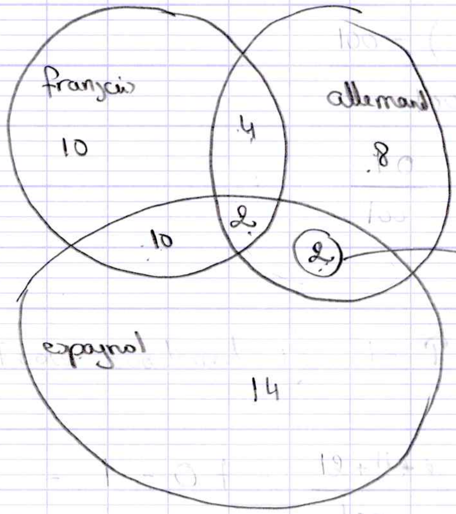
$$A = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \times \frac{1}{365^n}$$

Si $n = 40$, on a $A \simeq 89,12\%$

Exo 4 :

1)

a = $P(\text{aucun de ces cours}) = \dfrac{n^b \text{ d'élèves qui ne font aucun de ces cours}}{n^b \text{ d'élèves total}}$



car sur le 4 qui suivent juste allemand et l'espagnol, 2 suivent en plus le français donc 2 seulement ne font que allemand et espagnol

$$a = \frac{100 - (10 + 8 + 14 + 10 + 4 + 2 + 2)}{100}$$

$$= \frac{100 - 50}{100} = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

2)

b = $P(\text{exactement un cours}) = \dfrac{n^b \text{ d'élèves qui ne font qu'un cours}}{n^b \text{ d'élèves}}$

$$= \frac{10 + 8 + 14}{100} = \frac{32}{100}$$

3)

c = $P(\text{au moins un des 2 suit un cours}) = 1 - P(\text{aucun des 2 ne suit un cours})$

$= 1 - 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}975$

Exo 5

X est une variable discrète qui peut prendre les valeurs 0€, 1€ et 5€.

$P(X=0) = P(\text{dé donne } 0) = \frac{1}{4}$

$P(X=5) = P(\{\text{dé donne 3 et la bille donne 3}\} \text{ ou } \{\text{dé donne 5 et bille aussi}\})$

$= P(\text{dé}=3 \text{ et bille}=3) + P(\text{dé}=5 \text{ et bille}=5)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(X=1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{12-3-2}{12} = \frac{7}{12}$

k	0	1	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

$E[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{7}{12} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{5}{6} = \frac{17}{12}$

$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$E[X^2] = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{7}{12} + 5^2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{25}{6} = \frac{57}{12}$

d'où $V[X] = \frac{57}{12} - \left(\frac{17}{12}\right)^2$

Exo 6

1) X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5$ et 6

Soit $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^o \text{ feu tricolore est vert} \\ 0 & \text{si le } i^o \text{ feu tricolore est rouge ou orange} \end{cases}$

on a $X_i \sim \mathcal{B}(2/3)$ et les X_i sont indépendants

et $X = X_1 + X_2 + \dots + X_6$ (somme de 6 variables de Bernoulli indépendants)

donc $X \sim \mathcal{B}(6 ; 2/3)$

2) $T = 12 + 1.5 \times (6 - X)$ en effet si aucun arrêt dû à des feux tricolores, il faut 12 minutes pour faire 3 km en roulant à 15 km/h.

puis un feu tricolore faisant perdre 1.5 minutes, $1.5 \times (6 - X)$ est le temps perdu par les feux rouge ou orange rencontrés.

$$E[T] = E[12 + 1.5 \times (6 - X)]$$

$$= 12 + 1.5 \times E[6 - X]$$

$$= 12 + 1.5 \times (6 - E[X])$$ or $E[X] = 6 \times \frac{2}{3}$ car $X \sim \mathcal{B}(6; 2/3)$ $= 4$

$$= 12 + 1.5 \times (6 - 4)$$

$$= 12 + 1.5 \times 2$$

$$= 12 + 3$$

$$= 15$$

3) Puisque le temps moyen pour gagner l'école est de 15 minutes, en partant avec 17 minutes d'avance, il est raisonnable de penser que l'étudiant sera à l'heure.

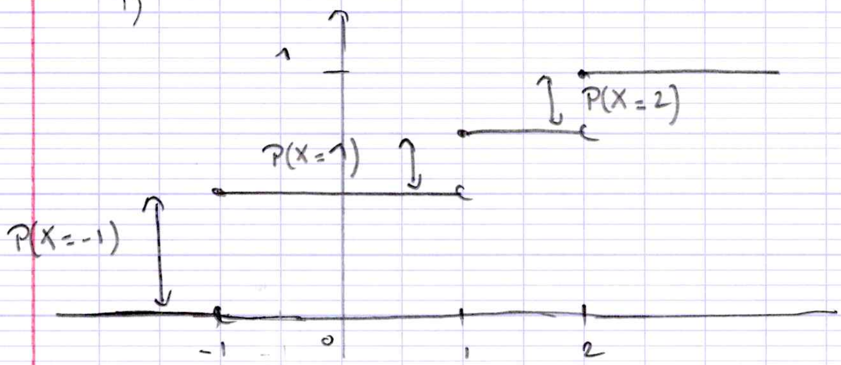
$$
\begin{aligned}
P(T > 17) &= P(12 + 1.5 \times (6 - X) > 17) \\
&= P(1.5 \times (6 - X) > 17 - 12) \\
&= P(1.5 \times (6 - X) > 5) \\
&= P(9 - 1.5 \times X > 5) \\
&= P(9 - 5 > 1.5 \times X) \\
&= P(4 > 1.5 \times X) \\
&= P\left(\frac{4}{1.5} > X\right) \\
&= P(2.666 > X) \\
&= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)
\end{aligned}
$$

on utilise la formule de la loi binomiale

$$
\begin{aligned}
&= C_6^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 + C_6^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + C_6^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3^6} + \frac{6 \times 2}{3^6} + 15 \times \frac{4}{3^6} \\
&= \frac{13 + 60}{3^6} = \frac{73}{3^6} = \frac{73}{729} \simeq 0.1
\end{aligned}
$$

Exo 7

1)



2)

k	-1	1	2
$P(X=k)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

3)

$$\mathbb{E}[X] = (-1)\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Exo 8

1)

a) On note $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'équipe arrive en retard après l'appel n° } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a $X = X_1 + X_2 + \dots + X_8$ avec les $X_i \sim \mathcal{B}(1/4)$ et indépendants

donc $X \sim \mathcal{B}(8 ; 1/4)$

b) Puisque $X \sim \mathcal{B}(8 ; 1/4)$, on a :

$$E[X] = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$V[X] = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

2)

a) Y peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2

$$P(Y=0) = \frac{\text{nb de tirages avec 0 mécontent}}{\text{nb de tirages total}} = \frac{C_6^4}{C_8^4}$$ ← car 4 personnes parmi 6

$$= \frac{\frac{6!}{4!(6-4)!}}{\frac{8!}{4!(8-4)!}} = \frac{\frac{6!}{\cancel{4!}(2!)}}{\frac{8!}{\cancel{4!}4!}}$$

$$= \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}}$$

$$= \frac{3}{14}$$

$$P(Y=1) = \frac{\text{nb de tirages avec 1 mécontent}}{\text{nb de tirages}} = \frac{C_2^1 \times C_6^3}{C_8^4}$$ ← les 3 non mécontents

$$= \frac{2 \times \frac{6!}{3!3!}}{\frac{8!}{4!4!}}$$

$$= 2 \times \frac{\frac{\cancel{6} \times 5 \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}}{\frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5}{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}}$$

$$= 2 \times \frac{\cancel{5} \times 4}{2 \times 7 \times \cancel{5}}$$

$$= \frac{2 \times 2}{7}$$

$$= \frac{4}{7}$$

$P(Y=2) = 1 - \frac{3}{14} - \frac{4}{7} =$

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$3/14$	$4/7$	$3/14$

b) $E[X] = 0 \times \frac{3}{14} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{3}{14}$

$= \frac{4}{7} + \frac{6}{14} = \frac{14}{14} = 1$