Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(2, 0.5)$

La fonction caractéristique de X, notée ϕ_X, est donnée par :

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$

or $X = \sqrt{0.5}\, Y + 2$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$

donc $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(\sqrt{0.5}\, Y + 2)}\right]$

$$= \mathbb{E}\left[e^{2it} \times e^{\sqrt{0.5}\, itY}\right]$$

$$= e^{2it} \times \mathbb{E}\left[e^{i(\sqrt{0.5}\, t)Y}\right]$$

$$= e^{2it} \times \phi_Y(\sqrt{0.5}\, t)$$

or $\phi_Y(u) = e^{-u^2/2}$

donc $\phi_X(t) = e^{2it} \times e^{-0.5t^2/2}$

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien

avec $X_1 \sim \mathcal{N}(2,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0,2)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(1,4)$

et X_1, X_2, X_3 indépendants

Donner la matrice de variance-covariance de X.

Donner la fonction caractéristique de X.

Par définition,

$$K_X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \times {}^t(X - \mathbb{E}[X]) \right]$$

or $\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

donc $(X - \mathbb{E}[X]) \times {}^t(X - \mathbb{E}[X]) = \begin{pmatrix} X_1 - 2 \\ X_2 - 0 \\ X_3 - 1 \end{pmatrix} \times \left((X_1 - 2), (X_2 - 0), (X_3 - 1) \right)$

$$= \begin{pmatrix} (X_1-2)^2 & (X_1-2)(X_1-0) & (X_1-2)(X_3-1) \\ (X_1-2)(X_2-0) & (X_2-0)^2 & (X_2-0)(X_3-1) \\ (X_1-2)(X_3-1) & (X_2-0)(X_3-1) & (X_3-1)^2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \, {}^t(X - \mathbb{E}[X]) \right] =$

$$\begin{pmatrix} V[X_1] & \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \operatorname{cov}(X_1, X_3) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_2) & V[X_2] & \operatorname{cov}(X_2, X_3) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_3) & \operatorname{cov}(X_2, X_3) & V[X_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^3$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X \rangle} \right] = \mathbb{E}\left[e^{it_1X_1 + it_2X_2 + it_3X_3} \right]$$

avec $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$

donc $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{it_1X_1} \times e^{it_2X_2} \times e^{it_3X_3}\right]$

$= \mathbb{E}\left[e^{it_1X_1}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{it_2X_2}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{it_3X_3}\right]$

car indépendance

$= \mathbb{E}\left[e^{it_1(2+Y_1)}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{it_2(\sqrt{2}Y_2)}\right] \times \mathbb{E}\left[e^{it_3(1+Y_3)}\right]$

avec $Y_1 \sim \mathcal{N}(0;1)$
$Y_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$
$Y_3 \sim \mathcal{N}(0,1)$

donc $\phi_X(t) = e^{2it_1 + it_3} \times e^{-t_1^2/2 - 2t_2^2/2 - t_3^2/2}$

On reprend le vecteur X précédent.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On pose $Y = AX$. Quelle est l'expression de K_Y, matrice de variance-covariance de Y ?

Par définition,

$$K_Y = \mathbb{E}\left[\left(AX - \mathbb{E}[AX]\right)\,{}^t\!\left(AX - \mathbb{E}[AX]\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(AX - A\mathbb{E}[X]\right)\,{}^t\!\left(AX - A\mathbb{E}[X]\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[A\left(X - \mathbb{E}[X]\right) \times {}^t\!\left(A\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\right)\right]$$
$$= A \times \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\,{}^t\!\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\right]\,{}^tA$$

$$= A \times K_x \, {}^tA$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K_y = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$