Courant alternatif

12 septembre 2020

Courant alternatif

Utilisé car

i) On peut changer très facilement
la tension.

ii) Haute tension : peu de pertes
sur grandes distances.

Courant alternatif

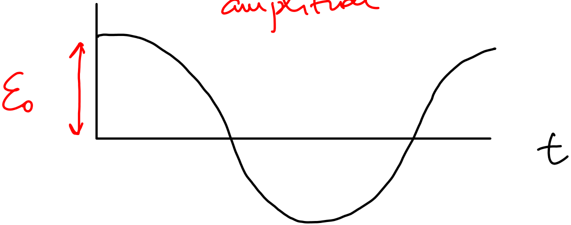
Courant sinusoïdal :

phase

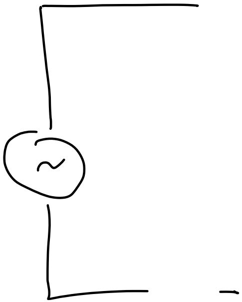
$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

amplitude

fréquence



Courant alternatif



Courant alternatif

$\underline{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}_0 e^{j\varphi}$

Notation complexe :

$\underline{\mathcal{E}(t)} = \mathcal{E}_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{\mathcal{E}_0}\, e^{j\omega t}$

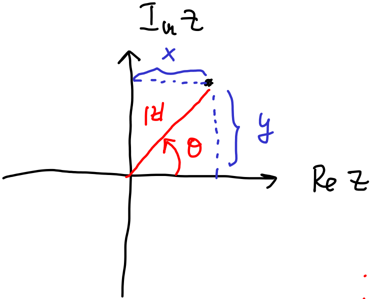
$j^2 = -1$

$\mathcal{E}(t) = \mathrm{Re}[\underbrace{\underline{\mathcal{E}(t)}}_{}] = \mathcal{E}_0 \,\mathrm{Re}[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$

On peut faire les calculs en notation complexe puis prendre la partie réelle de la solution à la fin.

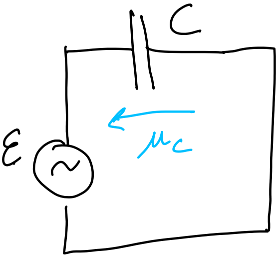
Courant alternatif

$$z = |z|\, e^{i\theta} = x + iy$$



$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad ; \quad e^{i\varphi} e^{i\omega t} = e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Exemple 1 :



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$Q = C u_c \Rightarrow i = c \frac{du_c}{dt}$$

En notation complexe :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \, e^{j\omega t} \, e^{j\varphi}$$

Loi des mailles : $\mathcal{E} = u_c \Rightarrow \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{i}{c}$

$$\Rightarrow j\omega \mathcal{E}_0 \, e^{j\omega t} \, e^{j\varphi} = \frac{i}{c} \Rightarrow$$

Courant alternatif

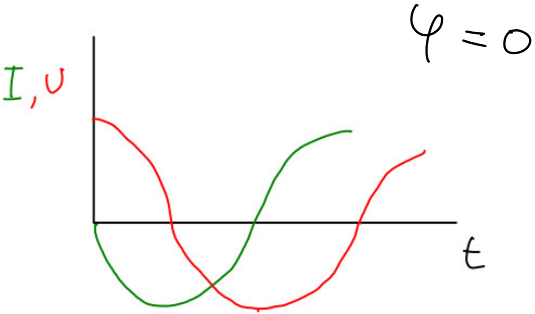
$$i(t) = j\omega \mathcal{E}_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} C$$

$$I(t) = \mathrm{Re}[i(t)] = -\omega \mathcal{E}_0 C \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= \omega \mathcal{E}_0 C \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

courant déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à U

Courant alternatif



On observe que (en notation complexe)

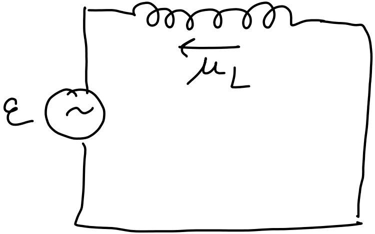
$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\varepsilon_0 e^{j\omega t} e^{i\varphi}}{j\omega \varepsilon_0 C e^{j\omega t} e^{i\varphi}} = \frac{1}{j\omega C}$$

ne dépend pas de t !

Attention ! Valable uniquement pour u et i en notation complexe !!

Courant alternatif

Exemple 2



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \, e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

Loi des mailles :

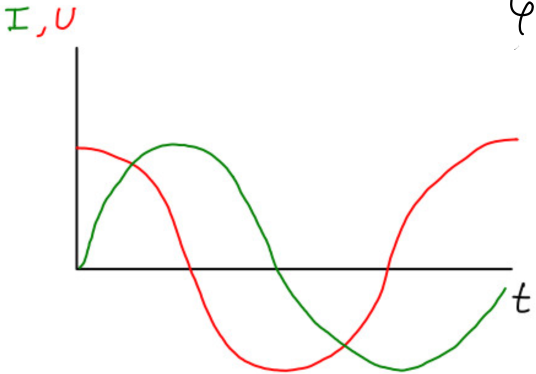
$$\mathcal{E} = u_L = L \frac{di}{dt} = \mathcal{E}_0 \, e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{1}{L} \int dt \, \mathcal{E}_0 \, e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0}{j\omega L} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$I(t) = \mathrm{Re}[i] = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Courant alternatif

$\varphi = 0$



Courant alternatif

En notation complexe :

$$\frac{u}{i} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}}{\frac{1}{L} \frac{1}{j\omega} e^{j\varphi} e^{j\omega t}} = j\omega L$$

Généralisation de la loi d'Ohm :

$$u = Z_m i$$

↳ impédance complexe

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

... et on traite les circuits comme avec le courant continu.

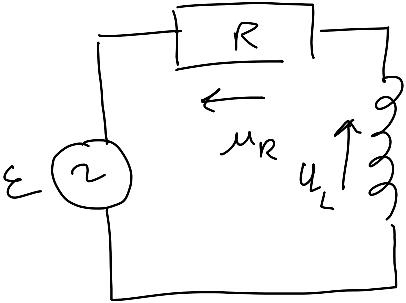
Questions :

1. Est-que ça marche vraiment ?

2. Quelles sont les limitations ?

Courant alternatif

Exemple :



$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$u_R = iR$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Courant alternatif

Résolution de $\mathcal{E}_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} = Ri + L\frac{di}{dt}$

$i = i_h + i_p$

- $R i_h + L\frac{d i_h}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d i_h}{i_h} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(i_h) = -\frac{R}{L} t \Rightarrow i_h = \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$

- $i_p = A e^{j\omega t} \Rightarrow \mathcal{E}_0 \cancel{e^{j\omega t}} e^{j\varphi_0} = R \cancel{e^{j\omega t}} A + j\omega L \cancel{e^{j\omega t}} A$

$\Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}_0 e^{j\varphi_0}}{R + j\omega L}$

Donc :

$$i = i_h + i_p = e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}}{R + j\omega L} = e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R + j\omega L}$$

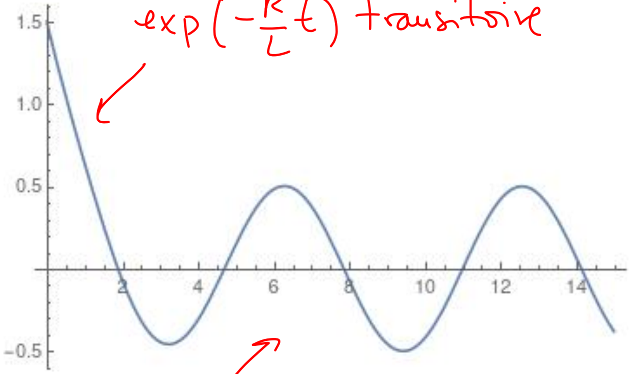
solution transitoire

solution permanente

$e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow 0$ pour $t \gg \frac{L}{R}$

$I(t)$

$\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$ transitoire



t

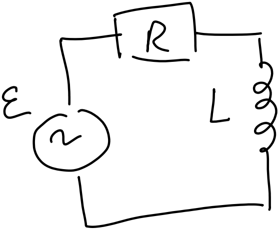
partie oscillante

Courant alternatif

Donc pour $t >> L/R$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R + j\omega L}$$

prédiction loi d'ohm généralisée



$$\mathcal{E} = iR + j\omega L i =$$

$$= i(R + j\omega L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R + j\omega L} \quad !!$$

<u>Conclusion</u> : en utilisant l'impédance complexe Z les calculs sont beaucoup plus simples MAIS on perd le régime transitoire dans la solution.

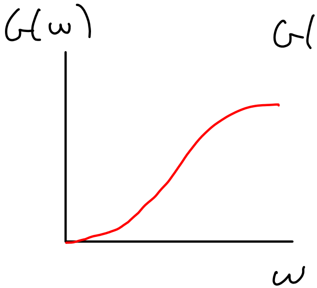
Quantité intéressantes :

- Fonction de transfert $H(\omega)$

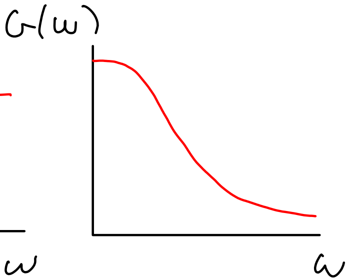
$$H(\omega) = \frac{u_L}{e}$$

- Gain : $G(\omega) = |H(\omega)|$
- Phase : $\arg(H(\omega))$: déphasage entre tensions entrée de L et sortie.

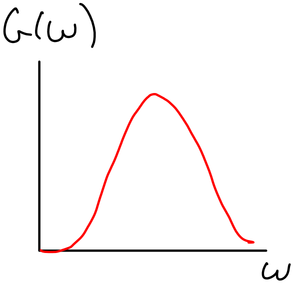
Construction de filtres :



passe-haut



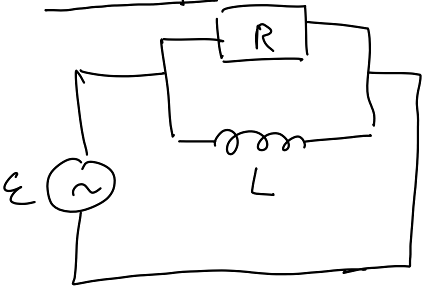
passe-bas



passe-bande

Courant alternatif

Exemple :



$$Z_{eff} = \frac{R\, j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{Z_{eff}}$$

Puissance dans un circuit alternatif

$\underline{P} = I^2 R$ $\qquad I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

exo : $\int_0^{2\pi} dx \sin^2 x = \frac{1}{2}$

Donc : $\underline{P} = R I_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

Puissance moyenne :

$$\langle P \rangle = R I_0^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = R \frac{I_0^2}{2} = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$: valeur efficace de l'intensité

$P = I_{eff}^2 R$

Courant alternatif

$$\langle \sin^2(\omega t+\varphi)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi/\omega} dt \, \sin^2(\omega t+\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi/\omega} dt \, \frac{1}{2} \left(1-\cos\left[2(\omega t+\varphi)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \, \frac{1}{2} \, \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}$$

Courant alternatif

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)$$