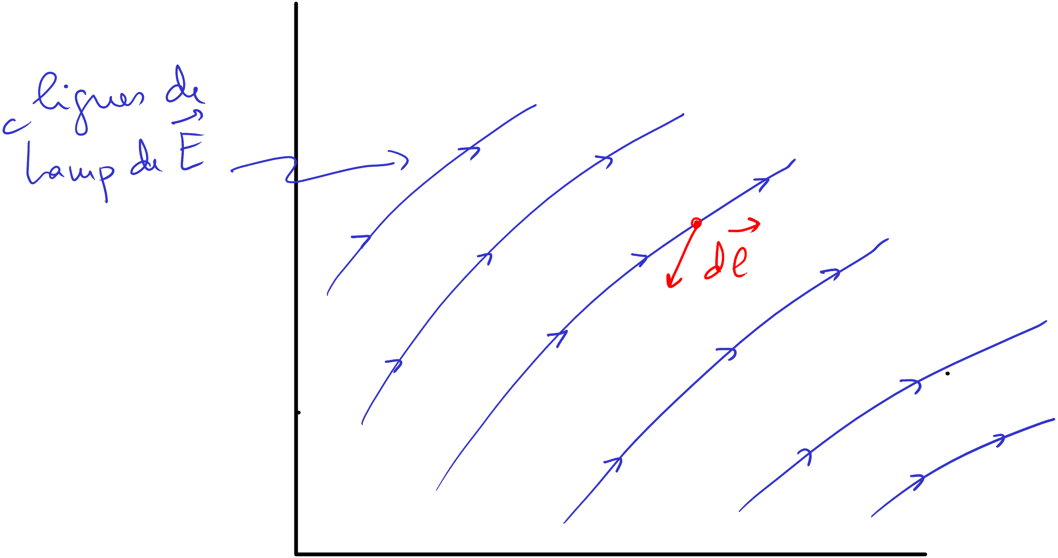
TRAVAIL ET ÉNERGIE

- On cherche à calculer le travail nécessaire pour déplacer une charge $q > 0$ du point $\vec{r}_1$ au point $\vec{r}_2$ dans le champ électrique $\vec{E}$.
- On va premièrement s'intéresser à un déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$.
- Pour effectuer le déplacement on doit s'opposer au champ en effectuant une force

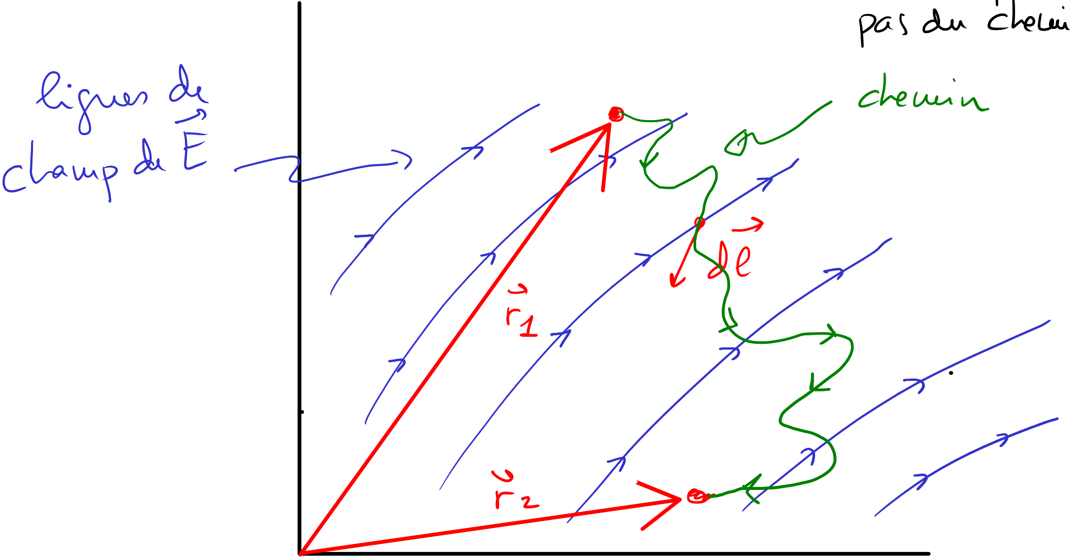
$$\vec{F} = -q\vec{E}$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -q\,\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \longrightarrow \text{produit scalaire}$$



$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

ne dépend pas du chemin !



En effet :

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ $\quad\quad$ $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$

$$W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\,\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\,(\vec{\nabla} V)\cdot d\vec{\ell} =$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) =$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\,dV(\vec{r}) = \boxed{q\left[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\right] = W}$$

Le travail ne dépend pas du chemin mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

Exemple: il y a une charge q_1 à la position $\vec{r}_1$. Quel est le travail nécessaire pour déplacer une charge q_2 de l'infini à $\vec{r}_2$?

Potentiel généré par la charge 1 :

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

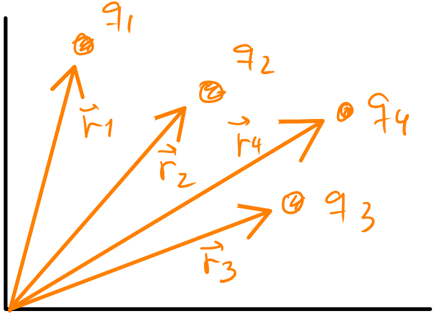
Travail :

$$W = q_2 \left[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r} \to \infty) \right] =$$

$$= q_2 V(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

Énergie d'une distribution ponctuelle de charges

= Travail total pour créer la configuration (donc en emmenant les charges depuis l'infini).



① Première charge : pas de travail (pas de champ électrique)

② Deuxième charge :

$$W_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

Notation $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

③ Troisième charge

$$W_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right]$$

④ Quatrième charge $W_4 = \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}}\right]$

Travail total : $W = W_2 + W_3 + W_4 =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right]$$

Sous forme compacte :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{4}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}^{4}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

Pour N particules :

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

évite de comptabiliser deux fois la même paire de particules.

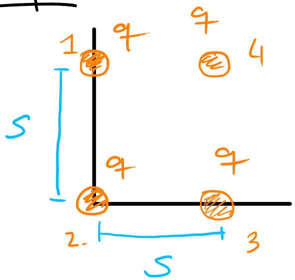
On peut écrire W à travers le potentiel V :

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i) = W}$$

Exemple



a) Travail mettre charge 4?

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{\sqrt{2}s}\right] =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

b) Travail pour assembler configuration?

Méthode 1 :

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i}\sum_{j>i}\frac{1}{r_{ij}} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{\sqrt{2}s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{\sqrt{2}s}+\frac{1}{s}\right] =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[4+\frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[4+\sqrt{2}\right]$$

<u>Méthode 2</u> $\quad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$

$$V(\vec{r}_1) = V(\vec{r}_2) = V(\vec{r}_3) = V(\vec{r}_4) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s}\,4\left[2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[4+\sqrt{2}\right]$$

Énergie d'une distribution continue de charges

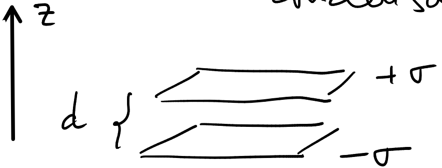
Densité de charge : $\rho(\vec{r})$.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \longrightarrow \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}) V(\vec{r})$$

On peut aussi l'écrire

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \, d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Exemple : énergie emmagasinée dans un condensateur plan



On choisit le zéro du potentiel sur la plaque chargée négativement :

$$V(0) = 0$$
$$V(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$W = \frac{1}{2}\int d^2r\, \sigma(\vec{r})\, V(\vec{r}) =$$

$$= \frac{\sigma}{2}\int d^2r\, V(\vec{r}) =$$

$$= \frac{\sigma}{2} A V = \frac{1}{2}\,\frac{V\varepsilon_0}{d}\,\frac{cd}{\varepsilon_0} V =$$

$$= \frac{1}{2} c V^2 = W \quad \boxtimes$$

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$Q = \sigma A$$

$$c = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$