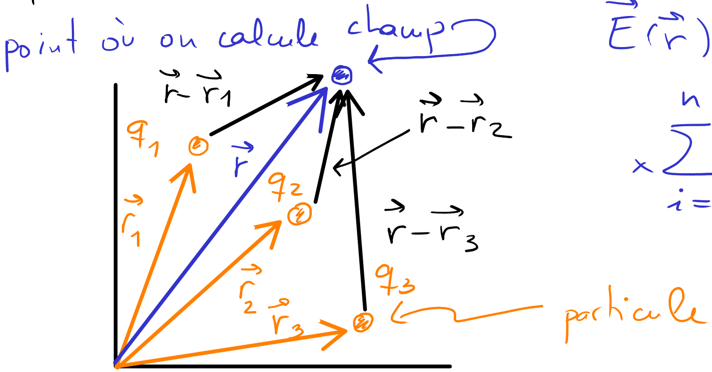
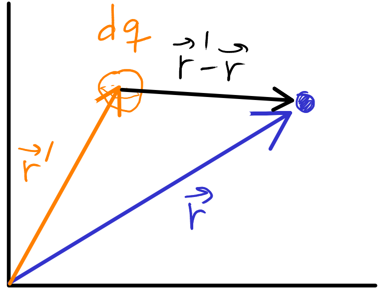
Champ électrostatique: distributions continues

Équation du champ électrique pour n particules :



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Équation du champ pour une distribution
continue de charge



dq : charge infinitésimale à
- la position $\vec{r}'$, dans un volume infinitésimal d^3r.

densité de charge $\rho(\vec{r})$: charge par unité de volume

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{d^3r} \Rightarrow dq = \rho(\vec{r})\, d^3r$$

Notations :

d^3r : volume infinitésimal en 3 dimensions sans spécifier le système de coordonnées

d^2r : en 2 dimensions

coordonnées cartésiennes : $d^3r = dx\,dy\,dz$
$d^2r = dx\,dy$

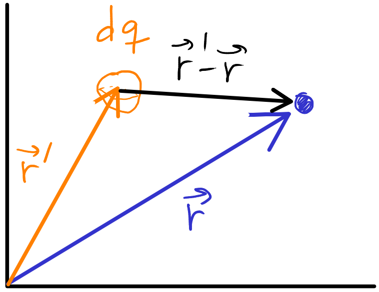
coordonnées polaires : $d^2r = dr\,d\theta\,r$

coordonnées cylindriques : $d^3r = dr\,d\varphi\,dz\,r\,d\varphi$

" sphériques : $d^3r = dr\,d\varphi\,d\theta\,r^2\sin\theta$

Densité de charge :

- 3 dimensions : $\rho = \dfrac{dq}{d^3r}$
- 2 dimensions : $\sigma = \dfrac{dq}{d^2r}$
- 1 dimension : $\lambda = \dfrac{dq}{dx}$

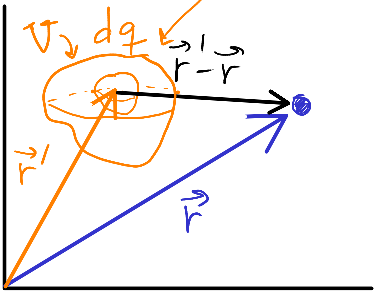


Le champ infinitésimal généré en $\vec{r}$ par la charge infinitésimale dq située en $\vec{r}'$ est :

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} =$$

$$= d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Si la distribution de charge est macroscopique, il faut intégrer sur tout son volume, que l'on notera V.



Donc :

$$\vec E(\vec r) = \int_V d\vec E(\vec r) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\rho(\vec r')\,\frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dx'dy'dz'\,\rho(x',y',z') \times$$

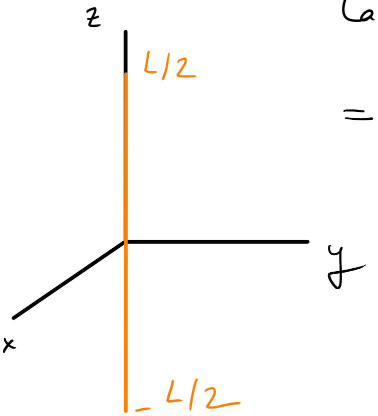
$$\times \frac{(x-x')\hat{x}+(y-y')\hat{y}+(z-z')\hat{z}}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

Composantes :

$$\vec{E} = E_x\hat{x}+E_y\hat{y}+E_z\hat{z}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dx'dy'dz'\,\rho(x',y',z')\,\frac{x-x'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

Exemple : champ généré par fil de densité uniforme de charge λ de longueur L



Calcul de $E_y(0,y,0) =$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dz' \, \frac{y}{\left[y^2 + z'^2\right]^{3/2}}}_{I}$$

$y' = 0$ car charge uniquement en $y = 0$

$x' = 0$ " " " " $x = 0$

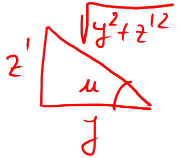
$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ car on calcule champ en $\vec{r} = (0, y, 0)$

$$I = \int dz' \frac{y}{\left[y^2 + z'^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int \frac{dz'}{\left[1 + \left(\frac{z'}{y}\right)^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} z'/y &= \tan u \\ dz' &= y \frac{du}{\cos^2 u} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{y} \int \frac{du}{\cos^2 u} \frac{1}{\left[1 + \tan^2 u\right]^{3/2}} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 u \left[1 + \tan^2 u\right]^{3/2} = \cos^2 u \left[1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\right]^{3/2} = \\ &= \cos^2 u \left[\frac{\overbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}^{=1}}{\cos^2 u}\right]^{3/2} = \frac{\cos^2 u}{\cos^3 u} = \frac{1}{\cos u} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{y} \int du \cos u = \frac{1}{y} \sin u = \frac{1}{y} \frac{z'}{\sqrt{y^2 + z'^2}}$$



Donc $E_y(0,y,0) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{1}{y}\left[\dfrac{z'}{\sqrt{y^2+z'^2}}\right]_{-L/2}^{L/2} =$

$$= \frac{\lambda 2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{y}\,\frac{L}{\sqrt{y^2+L^2/4}}$$