1 Modèle Stratigraphique

Ce modèle décrit le remplissage des bassins sédimentaire aux très grandes échelles de temps (millions d'années) et d'espace (kilométriques). Il est notamment utilisé en exploration pétrolière afin de prédire l'emplacement des réservoirs pétroliers en retraçant l'histoire géologique du bassin.

Il s'exprime sous la forme d'une équation parabolique non linéaire sur le domaine $(0, L) \times (0, T)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial^2 \psi(b)}{\partial x^2}(x,t) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \psi(b)}{\partial x}(0,t) = g_0 > 0 \\ \\ \frac{\partial \psi(b)}{\partial x}(L,t) = 0, \\ \\ h(x,0) = h_{init}(x), \end{cases}$$

où $b(x,t)$ est la bathymétrie définie par

$$b(x,t) = h_{mer}(t) - h(x,t),$$

et $\psi(b) = \displaystyle\int_0^b k(u)du$ avec

$$k(b) = \begin{cases} k^m \text{ if } b \geqslant 0 \\ k^c \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et donc } \psi(b) = \begin{cases} k^m b \text{ if } b \geqslant 0 \\ k^c b \text{ sinon} \end{cases}$$

On ne sait pas résoudre ce système analytiquement. On va donc le discrétiser en espace puis en temps afin de le résoudre numériquement.

Afin de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires, on discrétise tout d'abord ce système en espace (hors programme) par une méthode de type volume fini. Pour celà on utilise un maillage uniforme de l'intervalle $(0, L)$ en sous intervalles $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $i = 1, \cdots, N+1$, avec $x_{i-1/2} = (i-1)\Delta x$, $\Delta x = \frac{L}{N}$. Soient $x_i = \frac{x_{i+1/2}+x_{i-1/2}}{2} = (i-1/2)\Delta x$ pour $i = 1, \cdots, N$ les centres des intervalles.

Les inconnues du système discrétisé en espace sont les fonctions du temps $h_i(t)$ qui approximent $h(x_i, t)$ et l'équation aux dérivées partielles est discrétisée par le système d'équations aux dérivées ordinaires (EDOs) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_i(t)}{\partial t} + \dfrac{\psi(b_{i+1}(t)) - 2\psi(b_i(t)) + \psi(b_{i-1}(t))}{(\Delta x)^2} = 0, \, i = 2, \cdots, N-1, \\ \dfrac{\partial h_1(t)}{\partial t} + \dfrac{\psi(b_2(t)) - \psi(b_1(t))}{(\Delta x)^2} = \dfrac{g_0}{\Delta x}, \\ \dfrac{\partial h_N(t)}{\partial t} + \dfrac{\psi(b_{N-1}(t)) - \psi(b_N(t))}{(\Delta x)^2} = 0, \\ h_i(0) = h_{init}(x_i), i = 1, \cdots, N, \\ b_i(t) = h_{mer}(t) - h_i(t). \end{cases}$$

Soit le vecteur de $\mathbb{R}^N$

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_N(t) \end{pmatrix}$$

et la fonction $f(H,t)$ de $R^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$ définie par

$$f(H,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{g_0}{\Delta x} - \dfrac{\psi(h_{mer}(t) - h_2) - \psi(h_{mer}(t) - h_1)}{(\Delta x)^2} \\ \vdots \\ -\dfrac{\psi(h_{mer}(t) - h_{i+1}) - 2\psi(h_{mer}(t) - h_i) + \psi(h_{mer}(t) - h_{i-1})}{(\Delta x)^2} \\ \vdots \\ -\dfrac{\psi(h_{mer}(t) - h_{N-1}) - \psi(h_{mer}(t) - h_N)}{(\Delta x)^2} \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit comme le système d'EDOs

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt}(t) = f(H(t),t), \\ H(0) = H_{init}. \end{cases}$$

1.1 Schémas d'intégration des EDOs

La discrétisation des systèmes d'EDOs est au programme du cours. On utilisera ici le schéma d'Euler implicite.

On considère une discrétisation en temps $t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_k \cdots < t_m = T$, et on note $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, \cdots, m-1$ et $\Delta t = \max_{k=1,\cdots,m-1} \Delta t_k$. H_k est l'approximation de $H(t_k)$ pour $k = 0, \cdots, m$.

On considère le schéma suivant (Euler implicite) : $H_0 = H(0)$ et

$$\frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta t_k} = f(H_{k+1}, t_{k+1}),\ k = 0, \cdots, m-1.$$

1.2 Algorithme de Newton Raphson

La solution H_{k+1} est donc calculée connaissant la solution au pas de temps précédent H_k en résolvant le système non linéaire

$$F(H_{k+1}) = 0$$

où F est la fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$

$$F(H_{k+1}) = \frac{H_{k+1} - H_k}{\Delta t_k} - f(H_{k+1}, t_{k+1}).$$

On utilise pour celà l'algorithme de Newton Raphson qui calcule la suite H_{k+1}^l, $l = 1, \cdots$ telle que

$$F'(H_{k+1}^l)\Big(H_{k+1}^{l+1} - H_{k+1}^l\Big) = -F(H_{k+1}^l),$$

où $F'(H_{k+1}^l)$ est la matrice carrée de taille N dite matrice Jacobienne de F au point H_{k+1}^l. Si tout va bien cette suite va converger vers un point fixe de la suite qui sera donc bien solution de l'équation $F(H_{k+1}) = 0$.

1.3 Résolution des systèmes linéaires

A chaque itération de l'algorithme de Newton Raphson il faut donc résoudre le système linéaire

$$F'(H^l_{k+1})\Big(\Delta H^l\Big) = -F(H^l_{k+1}),$$

soit par une méthode directe de factorisation LU (élimination de Gauss), soit par une méthode itérative.

1.4 Exemple de simulation numérique

Le modèle permet de réprésenter en coupe au temps final T les strates sédimentaires du bassin définies comme les surfaces de dépot au temps successifs t obtenues après suppression des parties érodées entre le temps t et le temps final T.

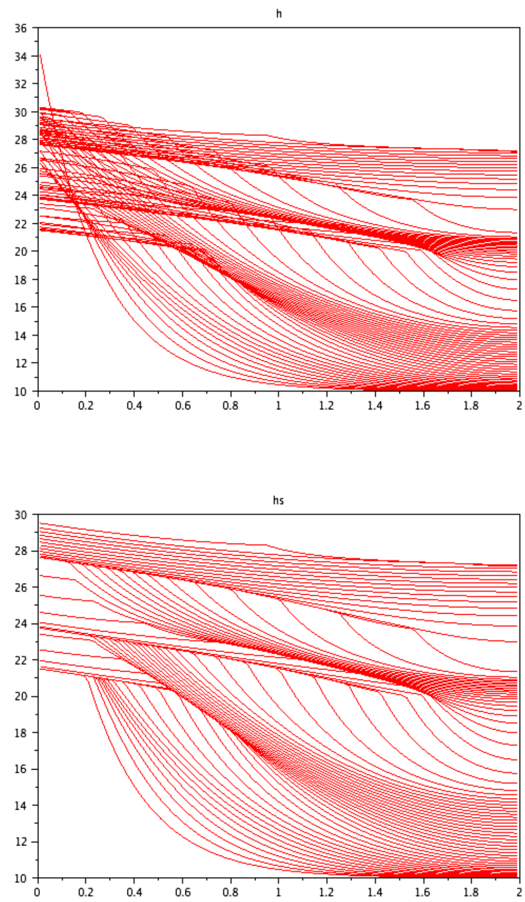

FIGURE 1 – En haut : $h(x,t)$ fonction de x aux différents temps t. En bas : strates du bassin au temps final T définies par $h_s(x,t) = \min_{\{t\,\leqslant\, q\,\leqslant\, T\}} h(x,q)$ (pour supprimer les parties érodées entre t et T) et tracées aux différents temps t.