TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice SDP, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, et la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ suivante

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$$

(i) Calculer $\nabla f(x)$ et la Hessienne $H(x)$ et montrer que $\nabla f(x) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante de minimum local. Calculer le minimum local.

(ii) On considère l'algorithme de descente selon le gradient

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$$

Montrer que l'on retrouve l'algorithme de Richardson appliqué à l'équation $Ax = b$. En déduire un choix de $\alpha^{(k)}$ garantissant la convergence.

(iii) Montrer que l'algorithme de Newton appliqué à $\nabla f(x) = 0$ converge en une seule itération

Exercice 2 : Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que $f'(\bar{x})$ est inversible. On considère la méthode de Newton modifiée de la façon suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Big(J_k^t J_k + \lambda I\Big)^{-1} J_k^t f(x^{(k)}),$$

où $J_k = f'(x^{(k)})$.

(i) Vérifier que la suite $x^{(k)}$ est toujours définie contrairement au cas de l'algorithme de Newton (que l'on obtient pour $\lambda = 0$).

(ii) Montrer que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a

$$f(y) - f(x) = \Big(\int_0^1 f'((1-t)x + ty)dt\Big)(y - x).$$

(iii) Soit la fonction A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A(x) = \int_0^1 f'((1-t)\bar{x} + tx)dt,$$

montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = D(x^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}),$$

avec $D(x) = I - \Big(\lambda I + (f'(x))^t f'(x)\Big)^{-1} (f'(x))^t A(x)$.

(iv) Montrer que $D(\bar{x})$ est une matrice SDP et que $\|D(\bar{x})\|_2 = \rho(D(\bar{x})) < 1$

(v) En déduire que la suite $x^{(k)}$ converge localement vers $\bar{x}$ au moins à l'ordre 1.