TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016, TD11

Exercice 1 : Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\beta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$(\nabla f(y) - \nabla f(x), y - x) \geq \beta \|y - x\|_2^2 \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2 \leq M \|y - x\|_2 \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

(i) Soit $\phi(t) = f((1-t)x + ty)$, montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y) - f(x) = \Big(\int_0^1 \nabla f((1-t)x + ty) dt, y - x\Big).$$

(ii) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x), y - x) + \frac{\beta}{2} \|y - x\|_2^2.$$

(iii) En déduire que f est strictement convexe au sens où

$$f((1-t)x + ty) < (1-t) f(x) + t f(y)$$

pour tous $t \in]0, 1[$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.

(iv) Montrer que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ et en déduire que f admet un minimum global. Déduire de la question (iii) que ce minimum global est unique et strict.

(v) On considère la méthode de descente selon le gradient à pas fixe suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}),$$

Montrer que l'application $g(x) = x - \alpha \nabla f(x)$ est contractante sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si $0 < \alpha < \frac{2\beta}{M^2}$ au sens où il existe $\gamma < 1$ tel que

$$\|g(y) - g(x)\|_2 \leq \gamma \|y - x\|_2 \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(vi) En déduire que l'algorithme converge au moins linéairement vers le minimum global si $0 < \alpha < \frac{2\beta}{M^2}$.