TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016, TD12

Exercice 1 :

On considère un réel $\lambda > 0$ et l'EDO $x(0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0.$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation en temps uniforme : $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \cdots, m$. On considère le schéma d'Euler explicite : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda\ x_k,\ k = 0, \cdots, m-1.$$

(1) Calculer la solution exacte de l'EDO notée $\bar{x}$

(2) Calculer la solution du schéma x_k pour $k = 0, \cdots, m$

(3) Donner une condition sur Δt pour que $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ (stabilité conditionnelle).

(4) Soit $x_0 = \bar{x}_0 > 0$. Donner une condition sur Δt pour que $x_k > 0$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ (positivité conditionnelle).

(5) Soit $\bar{x}_k = \bar{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma

$$r_k = \frac{\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k}{\Delta t} + \lambda\ \bar{x}_k,$$

vérifie $|r_k| \leq \frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$.

(6) On définit l'erreur $e_k = \bar{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer qu'elle vérifie l'équation :

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} + \lambda\ e_k = r_k \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m-1.$$

(7) On suppose que $\Delta t < \frac{2}{\lambda}$, montrer que

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m.$$

En déduire que le schéma converge à l'ordre 1.

Exercice 2 : Soient $f \in C^2\Big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n\Big)$ et l'EDO $x(0) = \bar{x}_0$, $x'(t) = f(x(t), t), t > 0$ de solution $\bar{x} \in C^3\Big([0, T], \mathbb{R}^n\Big)$ pour $T > 0$.

On considère une discrétisation en temps $t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_k \cdots < t_m = T$, et on note $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, \cdots, m-1$ et $\Delta t = \max_{k=0,\cdots,m-1} \Delta t_k$.

On considère le schéma de Heun : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = \frac{1}{2}f\Big(x_k + \Delta t_k f(x_k, t_k), t_k + \Delta t_k\Big) + \frac{1}{2}f\Big(x_k, t_k\Big),\ k = 0, \cdots, m-1.$$

On définit l'erreur de consistance pour $k = 0, \cdots, m-1$:

$$r_k = \frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t_k} - \frac{1}{2}f\Big(\bar{x}(t_k) + \Delta t_k f(\bar{x}(t_k), t_k), t_k + \Delta t_k\Big) - \frac{1}{2}f\Big(\bar{x}(t_k), t_k\Big)$$

(1) Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 1 au sens où il existe une constante β_1 (indépendante de Δt) telle que

$$\max_{k=0,\cdots,m-1} \|r_k\| \leq \beta_1 \Delta t.$$

(2) Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 2 au sens où il existe une constante β_2 (indépendante de Δt) telle que

$$\max_{k=0,\cdots,m-1} \|r_k\| \leq \beta_2 \Delta t^2.$$