TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

(1) Montrer que $\|A\|_2 = \Big(\rho(A^tA)\Big)^{1/2}$ et que pour A symétrique $\|A\|_2 = \rho(A)$

(2) Montrer que $\|A\|_1 = \max_{j=1,\cdot,n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$

(3) Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$

Exercice 2 : Soit $\|\|$ la norme induite dans $\mathcal{M}_n$ par une norme $\|\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et soit $A \in \mathcal{GL}_n$, on définit le conditionnement de A par

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

(1) Montrer que

$$\begin{cases} \mathrm{Cond}(A) \geq 1 \\ \mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A) \\ \mathrm{Cond}(AB) \leq \mathrm{Cond}(A)\mathrm{Cond}(B) \end{cases}$$

(2) On note $\mathrm{Cond}_2(.)$ le conditionnement induit par la norme euclidienne $\|\|_2$. Montrer que

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1}\right)^{1/2}$$

où σ_1, σ_n sont les valeurs propres min et max de A^tA. En déduire que $\mathrm{Cond}_2(A) = 1$ ssi $A = \alpha Q$ où Q matrice orthogonale.

(3) Soit x la solution du système $Ax = b$. Soit $\delta b \in \mathbb{R}^n$ non nul et $\delta x \in \mathbb{R}^n$ tel que $A(x+\delta x) = b+\delta b$. Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}(A)\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Exercice 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n$ tel que $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle.

(1) Montrer que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

(2) Montrer que $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ et que

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice SDP. On considère l'algorithme de Richardson pour résoudre le système $Ax = b$ de solution x :

$$\begin{cases} x^{(1)} \in \mathbb{R}^n, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}),\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) On définit l'erreur $e^{(k)} = x - x^{(k)}$. Trouver la matrice $B(\alpha)$ telle que $e^{(k+1)} = B(\alpha)e^{(k)}$.

(2) Montrer en se plaçant dans la base propre orthonormale de A que

$$\|e^{(k+1)}\|_2 \leq \rho(B(\alpha))^k\|e^{(1)}\|_2$$

(3) Calculer α_{opt} tel que $\rho(B(\alpha_{opt})) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \rho(B(\alpha))$ en fonction de la valeur propre minimale λ_1 et de la valeur propre maximale λ_n de A

(4) Estimer le nombre d'itérations k minimal pour atteindre une précision relative de l'erreur ϵ i.e.

$$\frac{\|e^{(k+1)}\|_2}{\|e^{(1)}\|_2} \leq \epsilon.$$

Exercice 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible telle que $A_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'algorithme de Gauss Seidel pour résoudre le système linéaire $Ax = b$: on se donne $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ et on calcule $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ pour $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$A_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^{(k)},\ i = 1, \cdots, n.$$

(1) Montrer que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + L^{-1}\Big(b - Ax^{(k)}\Big),\ k \in \mathbb{N},$$

avec L la partie triangulaire inférieure de A ie la matrice telle que $L_{i,j} = A_{i,j}$ si $i \geq j$ et $L_{i,j} = 0$ si $j > i$.

(2) Soit x la solution de $Ax = b$ et $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$e^{(k+1)} = (I - L^{-1}A)e^{(k)}, k \in \mathbb{N}.$$

et donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $x^{(k)}$ converge vers x.

(3) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et $b \in \mathbb{R}^2$ donné. On note $x \in \mathbb{R}^2$ la solution de $Ax = b$. Calculer la matrice d'itération $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'algorithme de Gauss Seidel telle que

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}, k \in \mathbb{N},$$

avec $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ et calculer les valeurs propre de B. En déduire si l'algorithme de Gauss Seidel converge ou non pour la matrice A.

Exercice 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice à diagonale strictement dominante au sens où

$$|A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on considère la méthode itérative de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$A_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j}x_j^{(k)},\ \ i = 1, \cdots, n$$

(1) Montrer que le noyau de A est réduit au vecteur nul et donc que A est inversible.

(2) Montrer que $A_{i,i}$ est non nul pour tout $i = 1, \cdots, n$, en déduire que la méthode de Jacobi est bien définie.

(3) On note $\bar{x}$ la solution du système linéaire $A\bar{x} = b$. Calculer la matrice B telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B(x^{(k)} - \bar{x}),\ k \geq 0.$$

(4) Montrer que $\rho(B) < 1$ ie que les valeurs propres complexes λ de la matrice B vérifient $|\lambda| < 1$. En déduire que l'algorithme de Jacobi converge.