TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A + A^t$ soit SDP.

Soit $b \in \mathbb{R}^n$ fixé, on note $x \in \mathbb{R}^n$ la solution du système $Ax = b$.

$$\text{On pose } e^{(k)} = x - x^{(k)},\ r^{(k)} = b - Ax^{(k)},$$

et on considère l'algorithme itératif : $x^{(1)}$ donné et pour $k \in \mathbb{N}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)}\ r^{(k)}.$$

pour $\alpha^{(k)}$ calculé dans la suite de l'exercice.

(1) Montrer que $(Ax, x) = 0$ implique que $x = 0$. En déduire que la matrice A est inversible.

(2) Montrer que

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} A r^{(k)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(3) Calculer $(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})$ en fonction de $r^{(k)}$, $Ar^{(k)}$ et $\alpha^{(k)}$

(4) Montrer que $(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})$ en tant que fonction de $\alpha^{(k)}$ (à $r^{(k)}$ fixé) admet un minimum pour

$$\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, Ar^{(k)})}{(Ar^{(k)}, Ar^{(k)})}.$$

Dans la suite de l'exercice on choisit cette valeur pour $\alpha^{(k)}$.

(5) Pour la valeur de $\alpha^{(k)}$ précédente montrer que

$$(r^{(k+1)}, r^{(k+1)}) = \Big(1 - \frac{(r^{(k)}, Ar^{(k)})^2}{(Ar^{(k)}, Ar^{(k)})(r^{(k)}, r^{(k)})}\Big)(r^{(k)}, r^{(k)}),$$

(6) Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz que

$$\Big(1 - \frac{(r^{(k)}, Ar^{(k)})^2}{(Ar^{(k)}, Ar^{(k)})(r^{(k)}, r^{(k)})}\Big) \geq 0.$$

(7) Soit C une matrice SDP de valeurs propres $\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$ et P la matrice de passage orthogonale de la base canonique dans la base propre orthonormée de C. Soit Λ^s la matrice diagonale de diagonale $((\lambda_1)^s, ..., (\lambda_n)^s)$. On définit pour tout $s \in \mathbb{R}$ la matrice $C^s = P\Lambda^s P^t$. Vérifier que C^s est SDP et que $C^{s+s'} = C^s C^{s'}$ pour tous $s, s' \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(8) Soient E et F deux matrices SDP, montrer que $F^{-1/2}EF^{-1/2}$ est SDP et que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{(Ex, x)}{(Fx, x)} = \lambda_{min}(F^{-1/2}EF^{-1/2}) > 0.$$

(9) En déduire que

$$\Big(1 - \frac{(r^{(k)}, Ar^{(k)})^2}{(Ar^{(k)}, Ar^{(k)})(r^{(k)}, r^{(k)})}\Big) \leq 1 - \lambda_{min}\Big(\frac{1}{2}(A^t + A)\Big)\lambda_{min}\Big((A^tA)^{-1/2}\frac{1}{2}(A^t + A)(A^tA)^{-1/2}\Big) < 1.$$

En déduire que la suite $x^{(k)}$ converge vers x.