TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante au sens où

$$|A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n.$$

(1) Montrer que le noyau de A est réduit au vecteur nul et donc que A est inversible.
(2) Montrer que $A_{i,i}$ est non nul pour tout $i = 1, \cdots, n$, en déduire que la méthode de Jacobi est bien définie.
(3) Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on note $\bar{x}$ la solution du système linéaire $A\bar{x} = b$. On considère la méthode itérative de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$A_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j} x_j^{(k)}, \ i = 1, \cdots, n$$

Calculer la matrice B telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B(x^{(k)} - \bar{x}), \ k \geq 0.$$

(4) Montrer que $\rho(B) < 1$ ie que les valeurs propres complexes λ de la matrice B vérifient $|\lambda| < 1$. En déduire que l'algorithme de Jacobi converge.
(5) Montrer que pour une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la norme matricielle induite par la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$ vérifie

$$\|C\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |C_{i,j}|.$$

(6) Calculer $\|B\|_\infty$ et montrer que $\|B\|_\infty < 1$, en déduire que $\rho(B) < 1$ (autre démonstration du résultat de la question 4).
(7) On considère l'algorithme de Gauss Seidel

$$A_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} A_{i,j} x_j^{(k)}, \ i = 1, \cdots, n$$

Montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = G(x^{(k)} - \bar{x}), \ k \geq 0,$$

avec $G = I - (D - E)^{-1} A = (D - E)^{-1} F$ avec la notation usuelle du cours $A = D - E - F$.
(8) Montrer que $\rho(G) < 1$ ie que les valeurs propres complexes λ de la matrice G vérifient $|\lambda| < 1$. En déduire que l'algorithme de Gauss Seidel converge.