TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice SDP. Selon les notations du cours on écrira $A = D - E - F$.

Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on note $\bar{x}$ la solution du système linéaire $Ax = b$. On considère la méthode itérative suivante pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (D-E)\tilde{x}^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \\ \\ (D-F)x^{(k+1)} = E\tilde{x}^{(k+1)} + b. \end{cases}$$

(1) Montrer que les matrices D, $D-E$, et $D-F$ sont inversibles.

(2) On note $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$ et $\tilde{e}^{(k)} = \bar{x} - \tilde{x}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer les matrices B_1, B_2 puis B telles que

$$\tilde{e}^{(k+1)} = B_1 e^{(k)},\ k \in \mathbb{N},$$
$$e^{(k+1)} = B_2 \tilde{e}^{(k+1)},\ k \in \mathbb{N},$$
$$e^{(k+1)} = B e^{(k)},\ k \in \mathbb{N}.$$

(3) Montrer que la matrice $ED^{-1}F$ est symétrique positive.

(4) Montrer que si λ est valeur propre de A et $v \neq 0$ un vecteur propre associé alors

$$\lambda A v + (\lambda - 1) E D^{-1} F v = 0.$$

(5) En déduire que $\lambda \in [0, 1[$.

(6) En déduire que la méthode itérative converge vers $\bar{x}$.

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(1) Pour tout $\epsilon > 0$ on pose $B_\epsilon = \frac{A}{\rho(A)+\epsilon}$

(2) Montrer que $lim_{k\to+\infty}\|B_\epsilon^k\| = 0$

(3) Montrer que $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$

(4) Montrer que $lim_{k\to+\infty}\|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$