TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 : Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On considère sa factorisation LU avec pivotage des colonnes suivante : $A^{(1)} = A$ et pour $k = 1, \cdots, n-1$:

$$i_k = argmax_{j=k,\cdots,n} |A^{(k)}_{k,j}|,$$

$$\tau^{(k)} = (k, i_k),$$
$$A^{(k+1/2)} = A^{(k)} \tau^{(k)},$$
$$A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k+1/2)},$$

avec $M^{(k)}_{i,i} = 1$ pour $i = 1, \cdots, n$; $M^{(k)}_{i,k} = m^{(k)}_{i,k}$ pour $i = k+1, \cdots, n$; $M^{(k)}_{i,j} = 0$ sinon, et où les $m^{(k)}_{i,k}$, $i = k+1, \cdots, n$ sont calculés de façon à obtenir $A^{(k+1)}_{i,k} = 0$ pour $i = k+1, \cdots, n$.

(1) Calculer les coefficients $m^{(k)}_{i,k}$, $i = k+1, \cdots, n$ de la matrice $M^{(k)}$

(2) Montrer que $AP = LU$ avec $U = A^{(n)}$, $L = (M^{(1)})^{-1} \cdots (M^{(n-1)})^{-1}$, $P = \tau^{(1)} \cdots \tau^{(n-1)}$.

(3) En utilisant un résultat du cours donner l'expression détaillée de la matrice L en fonction des coefficients $m^{(k)}_{i,k}$, $k = 1, \cdots, n-1$, $i = k+1, \cdots, n$.

(4) Ecrire l'algorithme de factorisation LU avec pivotage des colonnes et avec remplissage dans la matrice A.

Exercice 2 : Conservation de la largeur de bande.

On définit la largeur de bande d'une matrice comme suit

$$q = \max_{i,j=1,\cdots,n} \{|j-i| \text{ tel que } A_{i,j} \neq 0\}$$

— Montrer que la factorisation $A = LU$ sans pivotage conserve la largeur de bande q pour U et L au sens où les largeurs de bande de U et L sont au plus égales à celle de A

— En déduire une version plus efficace de l'algorithme de factorisation LU pour une matrice A de largeur de bande q.

— Calculer le coût de la factorisation LU avec cet algorithme.