TD Analyse Numérique Licence L3 Mathématiques, 2015-2016

Exercice 1 : Newton et point fixe en dimension 2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 2\sin(x_1) + 2\cos(x_2) \\ -5x_2 + 2\sin(x_2) + 2\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

On cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

(1) Mettre le système $f(x) = 0$ sous la forme d'un point fixe $g(x) = x$ avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ contractante par rapport à la norme $\|\|_1$.
En déduire qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et que la suite

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N} \text{ avec } x^{(0)} \in \mathbb{R}^2 \text{ donné}$$

converge vers $\bar{x}$ au moins linéairement.

(2) Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le système non linéaire $f(x) = 0$. Est-il toujours défini ?

Exercice 2 : méthode de la sécante en dimension 1.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. On considère la suite définie par $x^{(0)}$, $x^{(1)} \in \mathbb{R}$ et

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

(1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x^{(0)}$, $x^{(1)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ et si $x^{(0)} \neq x^{(1)}$ alors la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq 1/2|x^{(k)} - \bar{x}| \quad \forall k \geq 1.$$

On supposera que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et on procédera par récurrence sur l'hypothèse $x^{(k)} \neq x^{(k-1)} \in I_\alpha$.

(2) En déduire que la suite converge au moins linéairement.