Exercice 1 Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre $f(x) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(1)} \in \mathbb{R}, \\ (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\frac{(f(x^{(k)}))^2}{f(x^{(k)}+f(x^{(k)}))-f(x^{(k)})},\ k \in \mathbb{N}^*. \end{array} \right.$$

(i) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$, avec $x^{(k)} \neq \bar{x}$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(ii) En déduire par récurrence que si $x^{(1)} \in I_\alpha$ et en supposant $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout k, alors $x^{(k)}$ est bien défini et $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

(iii) Montrer que la convergence est super linéaire au sens où

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = 0,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \geq 1$.

(iv) Montrer qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\beta_1 > 0$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_{\alpha_1} =]\bar{x} - \alpha_1, \bar{x} + \alpha_1[$, avec $x^{(k)} \neq \bar{x}$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta_1 |x^{(k)} - \bar{x}|^2.$$

En déduire que l'algorithme converge quadratiquement.

Exercice 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée symétrique et soit $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ une valeur propre simple de A associée au vecteur propre $\bar{x}$ tel que $\|\bar{x}\|_2 = 1$ où $\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i)^2\Big)^{1/2}$ est la norme euclidienne. Pour calculer $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on applique l'algorithme de Newton à la résolution du système non linéaire (de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$) suivant :

$$f\Big((x,\lambda)\Big) = \left(\begin{array}{c} Ax - \lambda x \\ \|x\|_2^2 - 1 \end{array} \right) = 0$$

(i) Ecrire la Jacobienne $f'\Big((x,\lambda)\Big) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que la Jacobienne en $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est inversible. On montrera que son noyau est réduit au vecteur nul en exploitant le fait que A est symétrique et que la valeur propre est simple (suggestion : effectuer le produit scalaire de la première équation par $\bar{x}$).

(iii) En déduire la convergence locale de l'algorithme vers $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ en énonçant le théorème de convergence.