Analyse Numérique Licence L3 de Mathématique 2015-2016, TP11

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on considère l'algorithme de descente selon le gradient suivant

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)},$$

avec $p^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$.

(1) Soit l'algorithme de recherche linéaire dit de backtracking suivant Choisir $\bar{\alpha} > 0$, $\rho \in]0,1[$, $c_1 \in]0,1[$ et poser $\alpha = \bar{\alpha}$.

Tant que $f(x^{(k)} + \alpha p^{(k)}) > f(x^{(k)}) + c_1 \alpha (\nabla f(x^{(k)}), p^{(k)})$
$\alpha \leftarrow \rho\alpha$
Fin Tant que

Programmer la fonction

$$\alpha = \text{ backtracking}(\bar{\alpha}, \rho, c_1, x^{(k)}, p^{(k)}, g^{(k)}, f^{(k)}).$$

(2) Programmer l'algorithme suivant de descente selon le gradient avec recherche linéaire par l'algorithme de backtracking. L'algorithme de backtracking est initialisé avec

$$\bar{\alpha} = \frac{(\nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}))}{(H(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}))}$$

obtenue par minimisation du modèle quadratique en supposant la Hessienne $H(x^{(k)})$ SDP.

— Choix de la précision $\epsilon = 10^{-10}$ sur le résidu relatif
— $k_{max} = 10000$
— Initialisation : $x^{(1)} = (2, \cdots, 2)^t$ (dans $\mathbb{R}^n$), $g^{(1)} = \nabla f(x^{(1)})$, $f^{(1)} = f(x^{(1)})$, $nr^{(1)} = \|g^{(1)}\|_2$, $k = 1$
— Tant Que $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(1)}} > \epsilon$ et $k < k_{max}$ Faire
$H^{(k)} = H(x^{(k)})$
$p^{(k)} = -g^{(k)}$
$\bar{\alpha} = \frac{(g^{(k)}, g^{(k)})}{(H^{(k)} g^{(k)}, g^{(k)})}$
$\alpha^{(k)} = \text{ backtracking}(\bar{\alpha}, \rho, c_1, x^{(k)}, p^{(k)}, g^{(k)}, f^{(k)})$
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}$
$g^{(k+1)} = \nabla f(x^{(k+1)})$,
$nr^{(k+1)} = \|g^{(k+1)}\|_2$
$f^{(k+1)} = f(x^{(k+1)})$,
$k = k + 1$
— End Tant Que
— $nit = k$

Tracer $f^{(k)}$ fonction de k et $log(nr^{(k)}/nr^{(1)})/log(10$ fonction de k.

(2) Tester l'algorithme pour les deux fonctions fournies et comparer les résultats avec l'algorithme de Newton fourni qui résoud le système non linéaire $\nabla f(x) = 0$ par l'algorithme de Newton. On prendra $\rho = 0.9$ et $c_1 = 0.1$. Vérifier que le point stationnaire trouvé par les deux algorithmes est un minimum local en calculant le spectre de la Hessienne de f au point solution.