On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\psi(u) = \begin{cases} k_c u \text{ si } u < 0, \\ k_m u \text{ si } u > 0, \end{cases}$$

la fonction donnant le niveau marin fonction du temps

$$h_{mer}(t) = 25 + 5\cos(12t),$$

et la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$$f(h,t) = \frac{1}{dx^2}\begin{pmatrix} 2\psi(1) - \psi(2) - \frac{g0}{dx} \\ 2\psi(2) - \psi(3) - \psi(1) \\ \vdots \\ 2\psi(i) - \psi(i+1) - \psi(i-1) \\ \vdots \\ 2\psi(n-1) - \psi(n) - \psi(n-2) \\ 2\psi(n) - \psi(n-1) - \frac{g1}{dx} \end{pmatrix}$$

avec $b(i) = h_{mer}(t) - h(i)$, $i = 1, \cdots, n$. On considère l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\begin{cases} \frac{d}{\Delta t} h(t) = f(h(t), t), \\ h(0) = h_0, \end{cases}$$

On discrétise l'intervalle de temps $[0, t_f]$ de façon uniforme par

$$t^0 = 0,\ t^k = k\Delta t,\ k = 1, \cdots, N_{\Delta t}$$

où $\Delta t = \frac{t_f}{N_{\Delta t}}$. L'EDO est discrétisée par un schéma à un pas :

$$\frac{h^{(k+1)} - h^{(k)}}{\Delta t} = \phi(h^{(k)}, t^{(k)}, \Delta t),$$

pour $k = 0, \cdots, N_{\Delta t} - 1$ avec $h^{(0)}$ donné dans $\mathbb{R}^n$.

Cette EDO modélise le remplissage d'un bassin par les sédiments et $h_i^{(k)}$ est l'épaisseur des sédiments aux points $x_i = (i - 1/2)dx$, $i = 1, \cdots, n$ et aux temps t^k, $k = 0, \cdots, N_{\Delta t}$.

Les solutions discrètes $h_i^{(k)}$ vont converger vers la solution de l'équation aux dérivées partielles $\partial_t h(x,t) + \partial_{xx}\psi(h_{mer}(t) - h(x,t)) = 0$ lorsque n et $N_{\Delta t}$ tendent vers l'infini.

(1) Programmer les schémas ϕ suivant :
   (i) Schéma d'Euler explicite : $\phi(h, t, \Delta t) = f(h, t)$
   (ii) Schéma du point milieu : $\phi(h, t, \Delta t) = f(h + \frac{\Delta t}{2} f(h,t), t + \Delta t/2)$
   (iii) Schéma de Heun : $\phi(h, t, \Delta t) = \frac{1}{2}\Big(f(h,t) + f(h + \Delta t f(h,t)), t + \Delta t)\Big)$

(2) Etudier numériquement la stabilité et la convergence des trois schémas pour $n = 10$ fixé et $N_{\Delta t} = 150, 1500$.

(3) Prendre $n = 100$ et refaire la même étude avec $N_{\Delta t} = 150, 1500$, que constante t-on ?

(4) Etudier numériquement la stabilité et la convergence du schéma d'Euler implicite pour $n = 10, 100$ et $N_{\Delta t} = 150, 1500$. Que constante t-on par rapport aux schémas explicites ?