Analyse Numérique Licence L3 de Mathématique 2015-2016, TP2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice SDP (Symétrique Définie Positive). On considère $b \in \mathbb{R}^n$ et le système linéaire $Ax = b$ de solution $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{On pose } e^{(k)} = x - x^{(k)},\ r^{(k)} = Ae^{(k)} = b - Ax^{(k)},$$

et on considère l'algorithme itératif de Richardson pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(1)}$ donné et pour $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha\, r^{(k)}.\right.$$

(1) Programmer dans scilab la matrice tridiagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_{i,i} = \frac{2}{(n+1)^2}$ pour $i = 1, \cdots, n$, $A_{i,i+1} = -\frac{1}{(n+1)^2}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$, $A_{i,i-1} = -\frac{1}{(n+1)^2}$ pour $i = 2, \cdots, n$, et $A_{i,j} = 0$ pour $j \neq i, i+1, i-1$.
La taille n de la matrice est en paramètre de façon à pouvoir la faire varier dans les applications numériques. On utilisera la commande $diag(v)$ et $diag(u, 1)$, $diag(u, -1)$ où u et v sont des vecteurs.

(2) Programmer dans scilab le vecteur colonne $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \cdots, n$ et calculer $b = Ay$. Par la suite on va résoudre le système $Ax = b$ de solution y par l'algorithme de Richardson.

(3) Programmer dans scilab l'algorithme de Richardson à pas fixe suivant :
- Choix de la précision $\epsilon = 10^{-10}$ sur le résidu relatif
- Choix du paramètre $\alpha > 0$
- Initialisation : $x^{(1)} = 0$ (dans $\mathbb{R}^n$), $r^{(1)} = b, nr^{(1)} = \|r^{(1)}\|_2$, $k = 1$
- Tant Que $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(1)}} > \epsilon$ Faire

  $p^{(k)} = Ar^{(k)}$
  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}$
  $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha p^{(k)}$
  $nr^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2$
  $k = k + 1$
- End Tant Que
- $nit = k$

La forme programmée dans scilab ne stokera que l'itéré courant de p, x, r. On utilisera la boucle *while condition*; *end*, la fonction *norm*, et pour l'affichage à l'écran la commande *print*(%*io*(2),"*z* =",*z*) qui affiche la valeur de z.

(4) Tests numériques :
Tracer la courbe de la norme du résidu $nr^{(k)}$ fonction de k.
Tester différentes valeurs pour α et n. On verra en cours qu'un choix optimal pour A SDP est donné par

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}},$$

où λ_{min} et λ_{max} sont les valeurs propres minimales et maximales de A. Calculer α et tester ce choix.
Pour $n = 5, 10, 20, 40$ calculer le nombre d'itérations nit obtenu, la norme relative du résidu $\frac{\|r^{(nit+1)}\|_2}{\|r^{(1)}\|_2}$ et la norme relative de l'erreur $\frac{\|x^{(nit+1)} - y\|_2}{\|y\|_2}$.

(5) Le calcul de α utilisant les valeurs propres de A est en fait trop coûteux. Une méthode plus efficace que l'on étudiera en cours est d'utiliser un pas alpha dépendant de k :

$p^{(k)} = Ar^{(k)}$
$\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(p^{(k)}, r^{(k)})}$
$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} r^{(k)}$
$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} p^{(k)}$
$nr^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2$
$k = k + 1$

Programmer l'algorithme à pas variable et comparer les résultats avec ceux obtenus pour le α fixe optimal.