Analyse Numérique Licence L3 de Mathématique 2015-2016, TP8

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 2\sin(x_1) + 2\cos(x_2) \\ -5x_2 + 2\sin(x_2) + 2\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

On va calculer numériquement $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ par un algorithme de point fixe puis par l'algorithme de Newton.

(1) On considère la fonction g telle que

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\sin(x_1) + 2\cos(x_2) \\ 2\sin(x_2) + 2\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

et la suite $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$. Programmer la fonction scilab $y = g(x)$ puis l'algorithme de point fixe

— Choix de la précision $\epsilon = 10^{-14}$ sur le résidu relatif
— Initialisation : $x^{(1)} = 0$ (dans $\mathbb{R}^2$), $r^{(1)} = g(x^{(1)}) - x^{(1)}$, $nr^{(1)} = \|r^{(1)}\|_2$, $k = 1$
— Tant Que $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(1)}} > \epsilon$ Faire

$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$
$r^{(k+1)} = g(x^{(k+1)}) - x^{(k+1)}$
$nr^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2$
$k = k + 1$

— End Tant Que
— $nit = k$

Tracer la courbe $log(nr^{(k)})$ fonction de k. Que pouvez vous dire sur la convergence de cet algorithme.

(2) Programmer la fonction scilab $y = f(x)$ et $A = f'(x)$ puis programmer l'algorithme de Newton suivant :

— Choix de la précision $\epsilon = 10^{-14}$ sur le résidu relatif
— Initialisation : $x^{(1)} = 0$ (dans $\mathbb{R}^2$), $r^{(1)} = f(x^{(1)})$, $nr^{(1)} = \|r^{(1)}\|_2$, $k = 1$
— Tant Que $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(1)}} > \epsilon$ Faire

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (f'(x^{(k)})^{-1} r^{(k)}$
$r^{(k+1)} = f(x^{(k+1)})$
$nr^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2$
$k = k + 1$

— End Tant Que
— $nit = k$

Tracer la courbe $log(nr^{(k)})$ fonction de k et comparer la convergence de l'algorithme de Newton à celle du point fixe précédent.