Analyse Numérique Licence L3 de Mathématique 2015-2016, TP9

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f(s) = V_T \frac{s^2}{s^2 + \frac{(1-s)^2}{\mu}}$$

et la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$$F(S) = \frac{n}{L} \begin{pmatrix} f(1) - f(S_1) \\ f(S_1) - f(S_2) \\ \vdots \\ f(S_{n-1}) - f(S_n) \end{pmatrix}$$

et l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\frac{d}{dt} S(t) = F(S(t)) \text{ avec } S(0) = 0.$$

On discrétise l'intervalle de temps $[0, t_f]$ par

$$t^0 = 0,\ t^k = k\Delta t,\ \ k = 1, \cdots, N_{\Delta t}$$

où $\Delta t = \frac{t_f}{N_{\Delta t}}$. L'EDO est discrétisée par le θ schéma suivant, $\theta \in]0,1]$

$$S^{(k+1)} = S^{(k)} + \Delta t F(\theta S^{(k+1)} + (1-\theta) S^{(k)}),$$

pour $k = 1, \cdots, N_{\Delta t}$ avec $S^{(0)} = 0$ (dans $\mathbb{R}^n$).

Cette EDO représente l'injection d'eau en $x = 0$ dans un réservoir d'huile $(0, L)$. $S_i^{(k)}$ est la fraction volumique d'eau dans le réservoir et $1 - S_i^{(k)}$ la fraction volumique d'huile aux points $x_i = i\frac{L}{n}$, $i = 1, \cdots, n$ et aux temps t^k, $k = 0, \cdots, N_{\Delta t}$.

Les solutions discrètes $S_i^{(k)}$ vont converger vers la solution de l'équation aux dérivées partielles $\partial_t s(x,t) + \partial_x f(s(x,t)) = 0$ lorsque n et $N_{\Delta t}$ tendent vers l'infini.

(1) Programmer la fonction $F(S)$ et sa dérivée $F'(S)$.

(2) Programmer l'algorithme de Newton pour résoudre l'équation $G(y) = 0$ avec

$$G(y) = y - x - hF(\theta y + (1-\theta)x),$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, θ, et h donnés. Le Newton sera initialisé avec $y = x$. Le critère d'arrêt ϵ sur la norme du résidu relatif est fixé à 10^{-6}, et le nombre d'itérations maximum est fixé à 100. Le coefficient de relaxation ω est fixé à $\omega = 0.1$.

— *Initialisation*

  $y^{(0)} = x$

  $r^{(0)} = G\big(y^{(0)}\big)$; $nr^{(0)} = \|r^{(0)}\|_2$;

  $k = 0$.

— *Tant Que* $\frac{nr^{(k)}}{nr^{(0)}} > \epsilon$ *et* $k \leq 100$ *Faire*

$dy^{(k+1)} = -\big[G'\big(y^{(k)}\big)\big]^{-1} r^{(k)}$
$\alpha^{(k+1)} = \min(1, \omega/\|dy^{(k+1)}\|_\infty)$
$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \alpha^{(k+1)} dy^{(k+1)}$
$r^{(k+1)} = G\big(y^{(k+1)}\big)$
$nr^{(k+1)} = \|r^{(k+1)}\|_2$
$k = k + 1$

— *End Tant Que*

(3) Simuler l'EDO ci-dessus pour différentes valeurs de $n = 10, 40, 100$ et de $N_{\Delta t} = 10, 40, 100$. Observer la convergence des courbes de débit d'huile et d'eau en $x = L$ (puits producteur). Observer le comportement de l'algorithme de Newton.