Cours L2 Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Exercice 1 : on considère la matrice symétrique réelle A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère la méthode de la puissance itérée suivante afin de calculer la valeur propre λ_1 de plus grande valeur absolue de A : étant donné

$$q^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on calcule $q^{(k)} \in \mathbb{R}^2$ et $\nu^{(k)} \in \mathbb{R}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\begin{cases} q^{(k)} = \dfrac{Aq^{(k-1)}}{\|Aq^{(k-1)}\|_2}, \\ \\ \nu^{(k)} = \langle q^{(k)}, Aq^{(k)} \rangle. \end{cases}$$

(1) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A en les ordonnant par ordre décroissant en valeur absolue ainsi que la base orthonormale de vecteurs propres associés notés $u^{(1)}, u^{(2)}$.

(2) Calculer $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$q^{(0)} = \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)},$$

en déduire l'expression de $A^k q^{(0)}$ en fonction de $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ et λ_1, λ_2.

(3) Montrer par récurrence que $q^{(k)} = \dfrac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(4) Déduire des questions 2 et 3 l'expression de $q^{(k)}$ en fonction de $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ et λ_1, λ_2, puis calculer les limites de $q^{(k)}$ et de $\nu^{(k)}$ lorsque k tend vers l'infini.

(5) Montrer qu'il existe une constante C indépendante de k telle que

$$|\nu^{(k)} - \lambda_1| \leq C \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k}.$$