Cours L2 Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Exercice 1 :

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $g(x) = x$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ x^{(k+1)} = \dfrac{g(x^{(k)}) + \alpha x^{(k)}}{\alpha + 1}, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie

$$|\frac{g'(\bar{x}) + \alpha}{\alpha + 1}| < 1.$$

(1) On rappelle que d'après le théorème des accroissements finis il existe $\theta_k \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$g(x^{(k)}) - g(\bar{x}) = g'(\theta_k)(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Calculer $\gamma^{(k)}$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \gamma^{(k)}(x^{(k)} - \bar{x}).$$

(2) Montrer que

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \gamma^{(k)} = \frac{g'(\bar{x}) + \alpha}{\alpha + 1}.$$

En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que si $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ alors

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(3) Montrer par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Démontrer ensuite que

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

(4) Montrer que la convergence est au moins linéaire au sens où

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |\frac{g'(\bar{x}) + \alpha}{\alpha + 1}|,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(5) Donner une condition nécessaire sur α pour obtenir la convergence quadratique de l'algorithme.

(6) On suppose dans la suite de l'exercice que $g'(\bar{x}) \neq 1$ et que $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour le choix de α de la question précédente, montrer qu'il existe $\xi_k \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \frac{1}{2} \frac{g''(\xi_k)}{(1 - g'(\bar{x}))} (x^{(k)} - \bar{x})^2.$$

(7) Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta < 1$ et $\gamma > 0$ tels que $\alpha\gamma \leq \beta$ et tels que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ on ait

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \beta^{(2^k - 1)} |x^{(0)} - \bar{x}|,$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Soit A une matrice carrée d'ordre n Symétrique Définie Positive (SDP). On note $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Précisément, on a pour tous $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad E_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \qquad F_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

On considère le système linéaire

$$Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné et on note $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution.

On considère la méthode itérative suivante pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (D - E)y^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \\ \\ (D - F)x^{(k+1)} = Ey^{(k+1)} + b. \end{cases}$$

(1) On note $e^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc tel que $e_i^{(i)} = 1$ et $e_j^{(i)} = 0$ pour tous $i \neq j$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire canonique.

Montrer que $A_{i,i} = \langle Ae^{(i)}, e^{(i)} \rangle$.

(2) Montrer que $A_{i,i} \neq 0$ pour tous $i = 1, \cdots, n$ en utilisant que la matrice A est SDP. En déduire que la matrice D est inversible.

(3) Montrer en utilisant la question précédente que les matrices $D - E$ et $D - F$ sont inversibles.

(4) On note $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$ et $f^{(k)} = \bar{x} - y^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression des matrices B_1 et B_2 telles que

$$f^{(k+1)} = B_1 e^{(k)}, \ k \in \mathbb{N},$$
$$e^{(k+1)} = B_2 f^{(k+1)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

(5) Déduire de la question précédente l'expression de la matrice B telle que

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}, \ k \in \mathbb{N},$$

et donner une condition nécessaire et suffisante vue en cours pour que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ quel que soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(6) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le rayon spectral de la matrice B noté $\rho(B)$, qu'en déduisez vous ?