Cours L2 Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Exercice 1 : Conservation de la largeur de bande par la factorisation LU sans pivotage.

On définit la largeur de bande d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ comme suit

$$q = \max_{\{i,j=1,\cdots,n \text{ tels que } A_{i,j}\neq 0\}} |j-i|$$

On suppose que $A \in M_n(\mathbb{R})$ a pour largeur de bande q et que sa factorisation LU sans pivotage existe.

(1) On rappelle (voir cours chapitre III) que la factorisation LU sans pivotage s'écrit $A^{(1)} = A$ et pour $k = 1, \cdots, n-1$:

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)},$$

avec

$$\ell_{i,k} = -\frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i = k+1, \cdots, n,$$

et

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} a_{k,j}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i,j = k+1, \cdots, n.$$

Montrer que si $A^{(k)}$ a une largeur de bande inférieure ou égale à q, alors c'est aussi vrai pour les matrices $L^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$.
En déduire par récurrence que les matrices L et U ont chacune une largeur de bande inférieure ou égale à q.

Corrigé : On remarque tout d'abord que la largeur de bande est de façon équivalente à la définition ci-dessus le plus petit entier q tel que $|i-j| > q$ implique $a_{i,j} = 0$.

La formule de récurrence

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} a_{k,j}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i,j = k+1, \cdots, n.$$

indique que seules les lignes et colonnes $i,j = k+1, \cdots, n$ de la matrice $A^{(k+1)}$ sont modifiées par rapport à celles de la matrice $A^{(k)}$ (voir cours chapitre III).

Comme par hypothèse la propriété $|i-j| > q$ implique déjà $a_{i,j}^{(k)} = 0$, il suffit donc de montrer que si les indices i et j sont tels que

$$|i-j| > q \text{ et } i \geq k+1 \text{ et } j \geq k+1,$$

ceci implique que $a_{i,j}^{(k+1)} = 0$.

Soit de tels indices i, j, alors comme la matrice $A^{(k)}$ a une largeur de bande inférieure ou égale à q, on sait que $a_{i,j}^{(k)} = 0$. Supposons que $i \geq j$ alors

$$|i-k| = i-k > i-j = |i-j| > q$$

et donc $a_{i,k}^{(k)} = 0$ ce qui implique que $a_{i,j}^{(k+1)} = 0$. De même si $j \geq i$ alors

$$|k-j| = j-k > j-i = |i-j| > q,$$

et donc $a_{k,j}^{(k)} = 0$ ce qui implique que $a_{i,j}^{(k+1)} = 0$.
On a donc montré dans les deux cas que $a_{i,j}^{(k+1)} = 0$, ce qui montre que la largeur de bande de $A^{(k+1)}$ est inférieure ou égale à q.

En ce qui concerne $L^{(k)}$, ses éléments non nuls sont soit des 1 sur la diagonale soit des éléments du type

$$\ell_{i,k} = -\frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i = k+1, \cdots, n,$$

Comme par hypothèse la propriété $|i-j| > q$ implique déjà $a_{i,j}^{(k)} = 0$, on a donc bien $|i-j| > q$ implique que $\ell_{i,j} = 0$.

On en déduit par récurrence que $U = A^{(n)}$ a une largeur de bande inférieure ou égale à q et que tous les $L^{(k)}$, $k = 1, \cdots n-1$ également. D'après la formule du cours donnant la matrice L, il en résulte que la matrice L a une largeur de bande inférieure ou égale à q.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

calculer sa décomposition $A = LU$ sans pivotage en détaillant les étapes du calcul. Quelles sont les largeurs de bande des matrices A, L et U ?

Corrigé : On prend $a_{11} = 2$ comme pivot et on pose

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^{(2)} = L^{(1)}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On prend $a_{22}^{(2)} = \frac{5}{2}$ comme pivot et on pose

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$U = A^{(3)} = L^{(2)} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

On déduit ensuite

$$L = (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

avec $A = LU$.

En appliquant la définition, on obtient une largeur de bande $q = 1$ pour les trois matrices A, L et U, ce qui vérifie bien le résultat de la question (1).