Cours L2 Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on note $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres et $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres associés tels que $x^{(i)} \neq 0$ et $Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$. On supposera pour fixer les idées que λ_1 est la valeur propre de plus petite valeur absolue et que λ_n est celle de plus grande valeur absolue. On suppose que les valeurs propres λ_1 et λ_n sont simples.

On va calculer les valeurs propres λ_n et λ_1 en utilisant respectivement les algorithme de la puissance itérée et celui de la puissance inverse.

(1) implémenter l'algorithme de la puissance itérée suivant :

Initialisation : $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $k_{max} = 1000$, $k = 0$, $\epsilon = 10^{-10}$, $nr^{(0)} = 1$.

Tant que $nr^{(k)} \geq \epsilon$ et $k \leq kmax$:

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)} &= Ax^{(k)}, \\
x^{(k+1)} &= \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|_2}, \\
z^{(k+1)} &= Ax^{(k+1)}, \\
\nu^{(k+1)} &= \langle z^{(k+1)}, x^{(k+1)} \rangle, \\
r^{(k+1)} &= z^{(k+1)} - \nu^{(k+1)} x^{(k+1)}, \\
nr^{(k+1)} &= \|r^{(k+1)}\|_2, \\
k &= k+1,
\end{aligned}$$

(2) Tester l'algorithme sur la matrice fournie dans le code à compléter. Tracer sur la même figure la courbe $\log_{10}(nr^{(k)})$ fonction de k ainsi que la courbe $\log_{10}\Big(|\nu^{(k)} - \lambda_n|\Big)$ fonction de k. Que constatez vous ?

(3) implémenter l'algorithme de la puissance inverse suivant :

Initialisation : $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $k_{max} = 1000$, $k = 0$, $\epsilon = 10^{-10}$, $nr^{(0)} = 1$.

Tant que $nr^{(k)} \geq \epsilon$ et $k \leq kmax$:

$$
\begin{aligned}
y^{(k+1)} &= A^{-1}x^{(k)},\\
x^{(k+1)} &= \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|_2},\\
z^{(k+1)} &= Ax^{(k+1)},\\
\nu^{(k+1)} &= \langle z^{(k+1)}, x^{(k+1)}\rangle,\\
r^{(k+1)} &= z^{(k+1)} - \nu^{(k+1)}x^{(k+1)},\\
nr^{(k+1)} &= \|r^{(k+1)}\|_2,\\
k &= k+1,
\end{aligned}
$$

Vous utiliserez la commande backslash de scilab pour résoudre le système linéaire $Ay^{(k+1)} = x^{(k)}$.

(4) Tester l'algorithme sur la matrice fournie dans le code à compléter. Tracer sur la même figure (mais une figure différente de celle des questions 1 et 2) la courbe $\log_{10}(nr^{(k)})$ fonction de k ainsi que la courbe $\log_{10}\Big(|\nu^{(k)} - \lambda_1|\Big)$ fonction de k. Que constatez vous ? Expliquez pourquoi la convergence est plus lente que dans le calcul de λ_n précédent.