Cours L2 Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On va programmer l'algorithme de factorisation $PA = LU$ avec pivotage des lignes ainsi que la descente remontée pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.

L'algorithme de factorisation LU sans pivotage et la descente remontée correspondante sont déjà fournis et serviront de base de comparaison dans les exemples de systèmes également fournis dans le code à compléter (itest=1,2,3,4).

(1) Compléter la fonction *[A,P]=LUAvecPivotage(A,n)* mettant en oeuvre l'algorithme de factorisation $PA = LU$ avec pivotage avec stockage dans A suivant :

Initialisation : $P = (1, \cdots, n)$
  For $k = 1, \cdots, n-1$ (boucle sur les pivots)
    $q = \text{argmax}_{i=k,\cdots,n}|A_{i,k}|$ (choix du pivot) transposition : $\tau = (k, q)$, $q \geq k$
    $A \leftarrow \tau A =$ permutation des lignes k et q
    $P \leftarrow \tau P$ mise à jour de la permutation $= P(k) \leftarrow P(q)$ et $P(q) \leftarrow P(k)$
    For $i = k+1, \cdots, n$
      $A_{i,k} \leftarrow \dfrac{A_{i,k}}{A_{k,k}}$
    End For
    For $i, j = k+1, \cdots, n$
      $A_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - A_{i,k}A_{k,j}$
    End For
  End For

On utilisera $[maxpiv, r] = max(abs(A(k:n,k)))$; $q = r + k - 1$ permettant de calculer l'indice de ligne q donnant l'élément $|A_{q,k}|$ maximal parmi les éléments $|A_{i,k}|$, $j = k, \ldots, n$.

On utilisera la commande $A([k,q],:) = A([q,k],:)$ qui permet de permuter les lignes k et q de la matrice A.

On utilisera la commande $piv([k,q]) = piv([q,k])$ qui permet de permuter $piv(k)$ et $piv(q)$ dans la permutation piv. C'est à dire que l'on effectue l'opération $piv \leftarrow piv\ \tau$ avec $\tau = (k,q)$. La permutation P est notée piv dans le code à compléter.

(2) Compléter la fonction *x=SolLUAvecPivotage(A,P,n,b)* mettant en oeuvre l'algorithme suivant de descente remontée avec A contenant la factorisation LU avec pivotage des lignes précédente et P la matrice de permutation.

Descente : $Lz = Pb$

  $z = 0$

For $i = 1, \cdots, n$

$z_i = b_{P(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} z_j$

End For

Remontée : $Ux = z$

$x = 0$

For $i = n, \cdots, 1;$

$$x_i = \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j}{A_{i,i}}$$

End For

(3) Appliquer l'algorithme de factorisation LU avec pivotage des lignes pour la résolution de $Ax = b$ sur les 4 exemples du fichier à compléter (itest=1,2,3,4).
Comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus avec l'algorithme de factorisation LU sans pivotage fourni.
L'exemple 1 ne donne ni de pivots nuls ni de petits pivots. Le test 2 présente un très petit pivot $\delta = 10^{-14}$. Les exemples 3 et 4 donnent un ou plusieurs pivots nuls. Commentez les résultats.