TD Analyse Numérique Licence L2 MATH

Exercice 1 : Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Soit une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$0 < \gamma f'(\bar{x}) < 2.$$

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\gamma f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta^{(k)} \in]\min(\bar{x}, x^{(k)}), \max(\bar{x}, x^{(k)})[$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Calculer β_k en fonction de γ et $\theta^{(k)}$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \beta_k(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Corrigé : comme $f(\bar{x}) = 0$, on a

$$(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\gamma(f(x^{(k)}) - f(\bar{x})) = -\gamma f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}),$$

d'où

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (1 - \gamma f'(\theta^{(k)}))(x^{(k)} - \bar{x}),$$

et

$$\beta_k = (1 - \gamma f'(\theta^{(k)})).$$

(2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

Corrigé : comme $0 < \gamma f'(\bar{x}) < 2$ on remarque que

$$-1 < 1 - \gamma f'(\bar{x}) < 1,$$

et donc $|1 - \gamma f'(\bar{x})| < 1$. Comme f' est une fonction continue on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tout $\theta^{(k)} \in I_\alpha$ alors $|\beta_k| \leq \beta$. Comme $\theta^{(k)} \in]\min(\bar{x}, x^{(k)}), \max(\bar{x}, x^{(k)})[$, alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ implique que $\theta^{(k)} \in I_\alpha$ d'où la propriété demandée.

(3) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

Corrigé : supposons que $x^{(k)} \in I_\alpha$, il en résulte d'après la question précédente que

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}| < \beta\alpha < \alpha,$$

et donc que $x^{(k+1)} \in I_\alpha$. On en déduit par récurrence que $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(4) Déduire des questions (2) et (3) que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ et montrer que la convergence est linéaire avec

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |1 - \gamma f'(\bar{x})|,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \geq 0$.

Corrigé : Si $x^{(0)} \in I_\alpha$, on déduit des questions (2) et (3) que

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et donc

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq (\beta)^k |x^{(0)} - \bar{x}|.$$

Il en résulte que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ et donc que $\lim_{k\to+\infty} \theta^{(k)} = \bar{x}$. Par continuité de la fonction f', on déduit de la question (1) que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |1 - \gamma f'(\bar{x})|.$$

(5) Proposer un choix de γ donnant la convergence quadratique de l'algorithme.

Corrigé : une condition nécessaire pour obtenir la convergence quadratique est que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = 0,$$

ce que l'on obtient avec

$$\gamma = \frac{1}{f'(\bar{x})},$$

ce qui est un choix admissible dès lors que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Montrons que sous ces conditions, l'algorithme converge quadratiquement. L'algorithme est équivalent au point fixe

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),$$

avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\bar{x})}.$$

On vérifie que $g'(\bar{x}) = 0$ et que g est dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ce qui montre d'après le cours que l'algorithme converge au moins quadratiquement dès lors que le point initial $x^{(0)}$ est suffisament proche de $\bar{x}$.

Exercice 2.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. On considère la suite définie par $x^{(0)}$, $x^{(1)} \in \mathbb{R}$ et

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\frac{(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}), \quad k \geq 1.$$

(1) Par le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\xi_k \in (\bar{x}, x^{(k)})$ et $\theta_k \in (x^{(k-1)}, x^{(k)})$ tels que
$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\xi_k)(x^{(k)} - \bar{x})$
et
$f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) = f'(\theta_k)(x^{(k)} - x^{(k-1)})$.
En déduire l'expression de γ_k tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \gamma_k(x^{(k)} - \bar{x}), \quad k \geq 1.$$

Corrigé : En utilisant $f(\bar{x}) = 0$ on a

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = x^{(k)} - \bar{x} - \frac{(f(x^{(k)}) - f(\bar{x}))(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}.$$

On en déduit que

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = (1 - \frac{f'(\xi^{(k)})}{f'(\theta^{(k)})})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

donc $\gamma_k = (1 - \frac{f'(\xi^{(k)})}{f'(\theta^{(k)})})$.

(2) Montrer que $\lim_{(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \to (\bar{x}, \bar{x})} \gamma_k = 0$. On supposera que $x^{(k)} \neq x^{(k-1)}$.

Corrigé : Comme f' est continue et $f'(\bar{x}) \neq 0$ on remarque que

$$\lim_{(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \to (\bar{x}, \bar{x})} (1 - \frac{f'(\xi^{(k)})}{f'(\theta^{(k)})}) = (1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}) = 0.$$

(3) Soit $I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ et $k \geq 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que si $x^{(k)} \in I_\alpha$, $x^{(k-1)} \in I_\alpha$ et $x^{(k)} \neq x^{(k-1)}$, alors

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

Corrigé : On déduit de la question précédente que l'on peut choisir α tel que
- (i) $f(x)$ est strictement monotone sur $\bar{I}_\alpha$ (ce qui est possible car $f'(\bar{x}) \neq 0$ et f' est continue)
- (ii) $-\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{f'(x)}{f'(y)} \leq \frac{1}{2}$ pour tous $(x, y) \in \bar{I}_\alpha \times \bar{I}_\alpha$ d'après la définition de la limite et $1/2 > 0$.

Il en résulte que si $x^{(k)} \neq x^{(k-1)} \in I_\alpha$ alors $f(x^{(k)}) \neq f(x^{(k-1)})$ et

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} |x^{(k)} - \bar{x}|,$$

ce qui répond à la question avec $\beta = 1/2$ (notez que l'on pourrait prendre pour β toute valeur comprise strictement entre 0 et 1).

(4) On considère les choix de α et β de la question (3). Montrer par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et si $x^{(0)} \neq x^{(1)}$, alors

$$x^{(k)} \in I_\alpha, \; x^{(k-1)} \in I_\alpha, \; x^{(k)} \neq x^{(k-1)}, \quad \forall k \geq 1.$$

On supposera que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \geq 0$.

Corrigé : Il résulte de la question précédente que si $x^{(k)} \neq x^{(k-1)} \in I_\alpha$ alors $f(x^{(k)}) \neq f(x^{(k-1)})$ et

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|x^{(k)} - \bar{x}|.$$

On en déduit que $|x^{(k+1)} - \bar{x}| < \alpha/2$ donc $x^{(k+1)} \in I_\alpha$. Par ailleurs, par définition de la suite, on a soit $f(x^{(k)}) = 0$, soit $x^{(k+1)} \neq x^{(k)}$. Le cas $f(x^{(k)}) = 0$ implique $x^{(l)} = \bar{x}$ pour tous $l \geq k$ et dans ce cas la suite a donc convergé vers $\bar{x}$, on exclut donc ce cas de figure par la suite.

Par récurrence, on déduit que si $x^{(0)}$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et si $x^{(0)} \neq x^{(1)}$ alors

$$x^{(k)} \in I_\alpha,\ x^{(k-1)} \in I_\alpha,\ x^{(k)} \neq x^{(k-1)}, \quad \forall k \geq 1.$$

(5) On suppose que $x^{(0)} \in I_\alpha$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et $x^{(0)} \neq x^{(1)}$. Montrer, en utilisant les résultats des questions (3) et (4), que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

Corrigé : On a

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq 1/2|x^{(k)} - \bar{x}| \quad \forall k \geq 1.$$

d'où

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq (1/2)^{k-1}|x^{(1)} - \bar{x}| \quad \forall k \geq 2,$$

ce qui montre que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ au moins linéairement.

(6) On suppose que $x^{(0)} \in I_\alpha$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et $x^{(0)} \neq x^{(1)}$. Calculer la limite de $\dfrac{x^{(k+1)} - \bar{x}}{x^{(k)} - \bar{x}}$ lorsque $k \to +\infty$.

Corrigé : D'après la question (2) et d'après la convergence de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\bar{x}$, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{(k+1)} - \bar{x}}{x^{(k)} - \bar{x}} = 0,$$

ce qui montre que la suite converge super linéairement.