Cours d'analyse numérique de licence L3 MASS

Roland Masson

2019

1 Introduction
- Calendrier du cours
- Evaluation
- Objectifs
- Plan du cours
- Exemples d'applications du calcul scientifique
- Débouchés

2 Quelques rappels d'algèbre linéaire en dimension finie
- Espaces vectoriels
- Applications linéaires
- Matrices
- Transposition de matrices et matrices symétriques
- Déterminants
- Normes matricielles

3 Méthodes itératives

Calendrier du cours

- Cours en M25 le mardi de 8h00 à 10h
- TPs ou TDs en PV201-202 le mardi de 10h15 à 12h15

Calendrier du cours

17/09
24/9
01/10
08/10
15/10
22/10
29/10 Pause pédagogique
5/11
12/11
19/11
26/11
10/12 (examen final)

Evaluation

- Un examen partiel sur cours et TDs le 12/11: note *Partiel*
- Un examen de TP le 19/11: note *TP*
- Un examen final sur cours et TDs le 10/12: note *EF*

Note finale: $0.4EF + 0.3Partiel + 0.3TP$

Analyse numérique: objectifs

- Analyse numérique: conçoit et analyse mathématiquement les algorithmes de simulation sur ordinateurs de modèles mathématiques

- Objectifs du cours
  - Introduction à quelques algorithmes de bases en calcul scientifique
  - Fondements mathématiques (complexité, stabilité, convergence, consistance, ...)
  - Exemples d'applications et mise en oeuvre informatique sous scilab en TP

Plan du cours

- Résolution des systèmes linéaires $Ax = b$, $A \in \mathcal{M}_n$, $b, x \in \mathbb{R}^n$
  - Méthodes itératives: méthodes de Richardon, de Jacobi, de Gauss Seidel
  - Méthodes directes: méthode d'élimination de Gauss, factorisation LU, factorisation de Choleski
- Résolution des systèmes non linéaires $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  - Méthodes de point fixe
  - Méthodes de Newton
- Résolution des équations différentielles ordinaires (EDO): $y' = f(y, t)$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
  - Schémas explicites
  - Schéma d'Euler implicite

Références

Site web: http://math.unice.fr/∼massonr/L3MASS/L3MASS.html

Cours d'analyse numérique de Raphaèle Herbin (Université de Provence): http://www.cmi.univ-mrs.fr/∼herbin/anamat.html

Livre de P.G. Ciarlet: Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

Livre de Quateroni et al: "Méthodes numériques, algorithmes, analyse et applications", Springer, 2007.

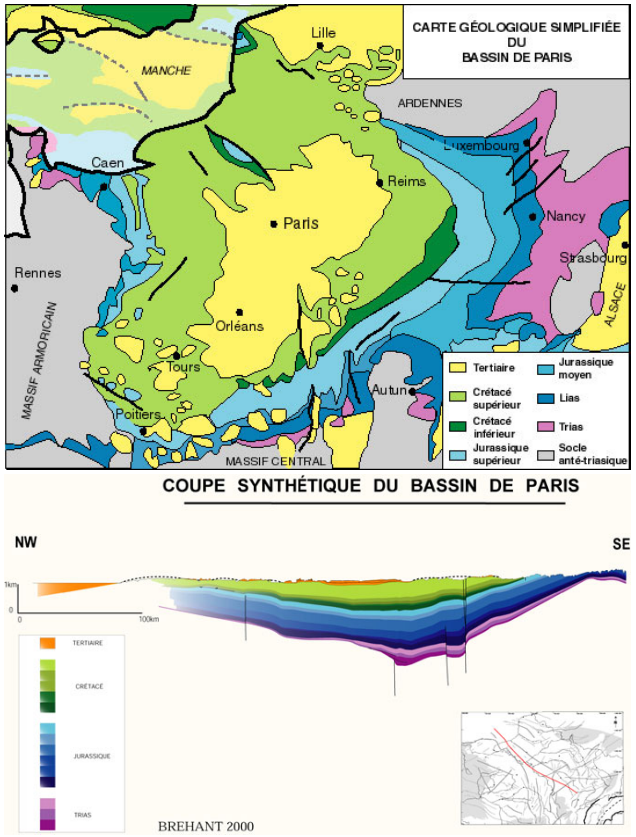
Domaines d'applications du calcul scientifique

- Énergie
  - Nucléaire
  - Pétrole
  - Fusion nucléaire
  - Eolien, hydrolien, solaire, ...
- Transport
  - Aéronautique
  - Spatial
  - Automobile
- Environnement
  - Météorologie
  - Hydrologie
  - Géophysique
  - Climatologie
- Finance, Economie, Biologie, Santé, Télécommunications, Chimie, matériaux, ...

Exemple de la simulation des réservoirs pétroliers

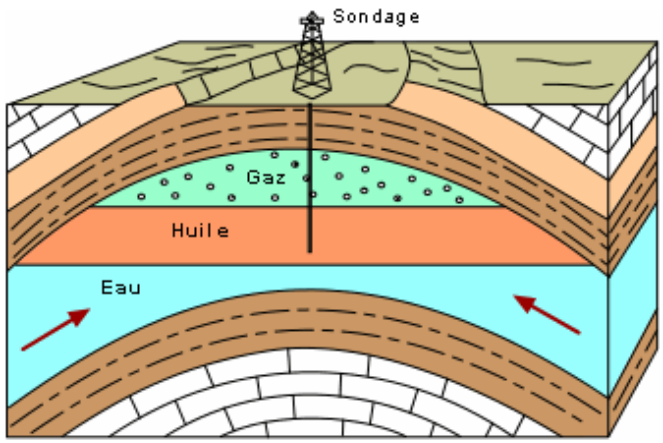
- Pétrole = huile de pierre

- Bassin de paris

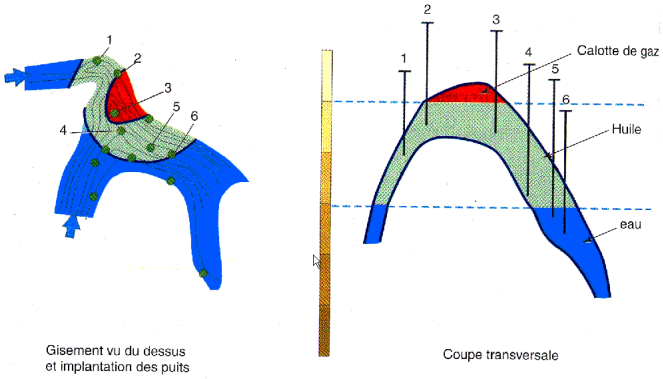


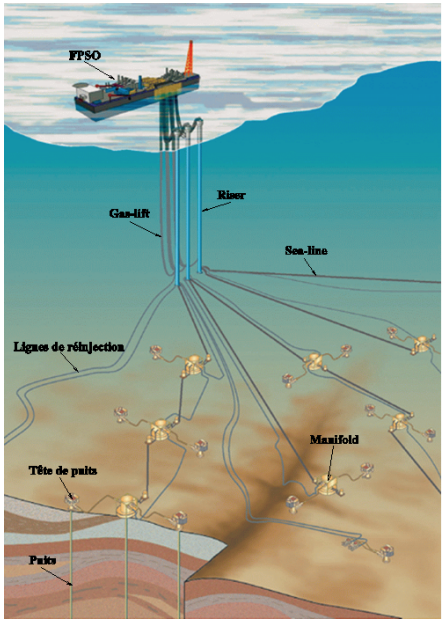
Exemple de la simulation des réservoirs pétroliers

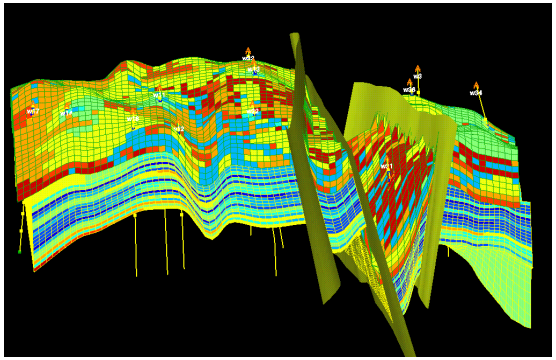
- Réservoir: piège géologique rempli d'hydrocarbures



Piège structural: anticlinal







Exemple de la simulation des réservoirs pétroliers

- Enjeux de la simulation
  - Prédiction de la production
  - Optimisation de la production (ou du rendement économique)
  - Intégration des données
  - Evaluation des incertitudes sur la production

Débouchés

- Compétences
  - Analyse numérique
  - Modélisation
  - Informatique
- Métiers
  - Développements de codes de calculs scientifiques
  - Etudes en modélisation numérique
  - Ingénieur de recherches en calcul scientifique
  - Chercheur académique en mathématiques appliquées
- Employeurs
  - SSII en calcul scientifique
  - EPIC: CEA, ONERA, IFPEN, BRGM, IFREMER, INRA, CERFACS, ...
  - Industrie: EDF, EADS, Dassault, Michelin, Areva, Total, CGGVeritas, Thales, Safran, Veolia, Rhodia, ...
  - Académique: Universités, CNRS, INRIA, Ecoles d'ingénieurs, ...

Espaces vectoriels

- Définition d'un e.v. sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi d'action de K sur E notée . tels que:
  - $(E, +)$ est un groupe commutatif
  - $1.\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $(\alpha\beta).\mathbf{x} = \alpha.(\beta.\mathbf{x})$ (associativité)
  - $(\alpha + \beta).\mathbf{x} = \alpha.\mathbf{x} + \beta.\mathbf{x}$, $\alpha.(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha.\mathbf{x} + \alpha.\mathbf{y}$ (distributivité)
- Exemple: $\mathbb{R}^n$ e.v. sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}^n$ e.v. sur $\mathbb{C}$):
  - $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda.\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Familles libres, génératrices, base, dimension

- Famille libre de m vecteurs $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ de E:
  - $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \; \forall \, i = 1, \cdots, m$
- Famille génératrice de m vecteurs $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ de E:
  - $E = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$
- Base: famille libre et génératrice
  - Dimension (supposée finie): toutes les bases ont même dimension appelée dimension de l'espace vectoriel E notée n
  - Une famille libre de n vecteurs est génératrice, c'est une base
  - Une famille génératrice de n vecteurs est libre, c'est une base

Espaces vectoriels normés

- Définition: e.v. muni d'une norme, ie une application de $E \to \mathbb{R}^+$, notée $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$ satisfaisant les propriétés suivantes
  - $\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$
  - $\|\lambda.\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$
  - $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

- Une norme définit sur E une topologie d'espace métrique avec $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
  - Limite de suite de vecteurs: $\lim_{k \to +\infty} \mathbf{v}_k = \mathbf{v} \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$

- Exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$
  - $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$.
- En dimension finie toutes les normes sont équivalentes ie il existe $c, C > 0$ telles que $c\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_\star \leq C\|\mathbf{x}\|$ (attention c et C dépendent de n).

Espaces vectoriels euclidiens

- e.v. muni d'un produit scalaire ie une forme bilinéaire symétrique définie positive notée $\langle ., . \rangle$
- Sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire canonique est $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$ est une norme appelée norme euclidienne

Applications linéaires

- $f : E \to F$, $f(\lambda.\mathbf{x}) = \lambda.f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
- $\mathcal{L}(E, F)$ espace vectoriel des applications linéaires de E dans F
- $\mathcal{L}(E)$ espace vectoriel des applications linéaires de E dans E ou endomorphismes de E
- $\Big(\mathcal{L}(E), +, ., \circ\Big)$ algèbre non commutative munie de la loi de composition des applications $f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$
- Noyau de f, $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in E \text{ tels que } f(\mathbf{x}) = 0\}$ (sous e.v. de E)
- Image de f, $\mathrm{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E\}$ (sous e.v. de F)
- Endomorphismes de E inversibles:
  - Application bijective ssi il existe $f^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$
  - f bijective $\Leftrightarrow$ f injective: $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
  - f bijective $\Leftrightarrow$ f surjective: $\mathrm{Im}(f) = E$

Matrice d'une application linéaire

- Bases $\left(\mathbf{e}_j, j = 1, \cdots, n\right)$ de E et $\left(\mathbf{f}_i, i = 1, \cdots, m\right)$ de F
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{i,j}\mathbf{f}_i$
- $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \in E$
- $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j\right) \mathbf{f}_i$
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \; Y = AX$
- Retenir que les n colonnes j de A sont données par les images $f(\mathbf{e}_j)$
- Espace vectoriel des matrices de dimension m, n: $\mathcal{M}_{m,n}$ (à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Matrices remarquables: diagonale, symétrique, triangulaires inférieure ou supérieure

Exercice: produit de matrices versus composition d'applications linéaires

- Soient E, F, G des e.v de dimensions resp. n,m,p, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$
- Des bases étant données, f a pour matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et g a pour matrice $B \in \mathcal{M}_{p,m}$
- $g \circ f$ a pour matrice le produit $BA \in \mathcal{M}_{p,n}$ tel que

$$(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} B_{i,k} A_{k,j}$$

- Produit de matrices: $\mathcal{M}_{p,m} \times \mathcal{M}_{m,n} \to \mathcal{M}_{p,n}$
  - produit matrice vecteur: $\mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,1} \to \mathcal{M}_{m,1}$
  - produit scalaire de deux vecteurs: ligne . colonne $\mathcal{M}_{1,n} \times \mathcal{M}_{n,1} \to \mathcal{M}_{1,1}$
  - produit tensoriel de deux vecteurs: colonne. ligne $\mathcal{M}_{n,1} \times \mathcal{M}_{1,n} \to \mathcal{M}_{n,n}$

Exercice: changements de base pour les vecteurs et les matrices

- P: matrice de passage d'une base dans une autre $\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^{n} P_{k,j}\mathbf{e}_k$ (colonnes de la nouvelle base dans l'ancienne)
- Changement de base pour les coordonnées des vecteurs: $X = P\tilde{X}$.
- Changement de base pour les matrices des applications linéaires: $X = P\tilde{X}$, $Y = Q\tilde{Y}$ et $\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$, $Y = AX$ implique que

$$\tilde{A} = Q^{-1}AP.$$

Matrices carrés inversibles

- $A \in \mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{M}_n$ est inversible ssi l'une des propriétés suivantes est vérifiée
  - Il existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - A est injective ie $AX = 0 \Rightarrow X = 0$
  - A est surjective ie $\mathrm{Im}(A) = \{AX,\ X \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$

- $A, B \in \mathcal{M}_n$ inversibles

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Transposition de matrices

- $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on définit ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}$ par

$$({}^tA)_{i,j} = A_{j,i} \text{ pour tous } i = 1, \cdots, n, \, j = 1, \cdots, m$$

- Produit scalaire canonique de deux vecteurs (colonnes) $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$${}^tXY = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

- Matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est symétrique ssi

$${}^tA = A$$

Diagonalisation d'une matrice carrée symétrique $A \in \mathcal{M}_n$

- Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ d'une matrice réelle symétrique A sont réelles et il existe une base orthonormée de vecteurs propres $F^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, n$ telle que
$$AF^i = \lambda_i F^i \text{ et } ({}^tF^i)F^j = \delta_{i,j} \text{ pour tous } i, j = 1, \cdots, n$$
- Si P est la matrice de passage de la base canonique dans la base F^i, $i = 1, \ldots, n$, alors on a
$$P^{-1} = {}^tP$$
et
$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Déterminants de n vecteurs dans un e.v. E de dimension n pour une base donnée

- Unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 sur la base
  - $\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}_n\Big) = 0$ (alternée)
  - Antisymétrie:

$$\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_n\Big) = -\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n\Big)$$

  - On a donc aussi pour toute permutation σ de $\{1, \cdots, n\}$,

$$\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\Big) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}\Big)$$

- Déterminant d'une matrice carrée A = déterminant des vecteurs colonnes

$$\mathrm{Det}\Big(A\Big) = \mathrm{Det}\Big(A_{.,1}, \cdots, A_{.,n}\Big) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(\sigma) A_{\sigma(i),i}$$

Propriétés du déterminant

- Les vecteurs colonnes de A sont libres ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- Donc A est inversible ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(BA)$
- $\mathrm{Det}({}^tA) = \mathrm{Det}(A)$
- Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{i,j}\mathrm{Det}(A^{(i,j)}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{i,j}\mathrm{Det}(A^{(i,j)})$$

Normes matricielles

- Une norme matricielle sur l'e.v. $\mathcal{M}_n$ est une norme telle que

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

- Une norme matricielle induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme matricielle définie par

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

- On a pour une norme matricielle induite: $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

Exercice: exemples de normes induites

- $\|A\|_\infty = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$
- $\|A\|_1 = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$
- $\|A\|_2 = \mathrm{Sup}_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = \rho({}^tAA)^{1/2}$

Norme et rayon spectral

- Spectre de A:
  $spec(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $u \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $Au = \lambda u\}$
- Rayon spectral $\rho(A) = \max_{\lambda \in spec(A)} |\lambda|$ $\mathbb{C}$.

On admettra le lemme suivant qui montre la proximité entre norme et rayon spectral (voir preuve dans le livre de Ciarlet ou le cours de Raphaèle Herbin)

- $\rho(A) \leq \|A\|$ quelle que soit la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$
- Quels que soient $A \in \mathcal{M}_n$ et $\epsilon > 0$ il existe une norme induite $\|.\|_{A,\epsilon}$ telle que
$$\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Théorème: convergence de la suite A^k pour $A \in \mathcal{M}_n$

- Les propositions suivantes sont équivalentes
  - (1) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$
  - (2) $\lim_{k \to +\infty} A^k x = 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$
  - (3) $\rho(A) < 1$
  - (4) Il existe une norme induite $\|.\|$ telle que $\|A\| < 1$.

Théorème: convergence de la suite A^k pour $A \in \mathcal{M}_n$

Preuve:

- (1) $\Rightarrow$ (2): car $\|A^k x\| \leq \|A^k\| \|x\|$
- (2) $\Rightarrow$ (3): par la contraposée non (3) $\Rightarrow$ non (2): $\rho(A) \geq 1$ implique qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ non nul et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $Au = \lambda u$ et $|\lambda| \geq 1$. Ceci implique que $A^k u = \lambda^k u$ et donc (2) ne peux être vérifié.
- (3) $\Rightarrow$ (4): découle du lemme ci-dessus
- (4) $\Rightarrow$ (1): on a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ avec $\|A\| < 1$ d'où (1)

Corollaire: suite A^k et rayon spectral

- Rayon spectral et suite des puissances d'une matrice: on démontre la propriété suivante: $\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k}$ quelle que soit la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$

Preuve: on a tout d'abord $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$ d'où $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$
Soit $\epsilon > 0$. On considère $B_\epsilon = \frac{A}{\rho(A)+\epsilon}$, telle que $\rho(B_\epsilon) < 1$. D'après le théorème précèdent $\lim_{k\to+\infty}(B_\epsilon)^k = 0$, donc il existe N tel que pour tout $k \geq N$ on a

$$\|(B_\epsilon)^k\| = \frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\epsilon)^k} \leq 1.$$

On déduit que $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$ ce qui prouve le corollaire.

Matrices de la forme $I + A$ ou $I - A$

- Si $\rho(A) < 1$ alors les matrices $I + A$ et $I - A$ sont inversibles
- La série de terme général A^k converge (vers $(I - A)^{-1}$ ssi $\rho(A) < 1$
  - Preuve: $\sum_{k=0}^{N} A^k(I - A) = I - A^{N+1}$ et utiliser le lemme précédent
- Si $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle, alors $I - A$ est inversible et on a $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ (idem pour $I + A$)

Conditionnement

Soit $\|\|$ la norme induite dans $\mathcal{M}_n$ par une norme $\|\|$ sur $\mathbb{R}^n$

$$\text{Conditionnement de } A \text{ inversible } : \ \mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\begin{cases} \mathrm{Cond}(A) \geq 1 \\ \mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A) \\ \mathrm{Cond}(AB) \leq \mathrm{Cond}(A)\mathrm{Cond}(B) \end{cases}$$

Soit A inversible et σ_1, σ_n les vp min et max de ${}^tAA$, on a pour la norme $\|\|_2$

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1}\right)^{1/2}$$

On en déduit que $\mathrm{Cond}_2(A) = 1$ ssi $A = \alpha Q$ où Q matrice orthogonale

Pour A SDP de vp min et max λ_1 et λ_n, on a pour la norme $\|\|_2$

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

Erreur d'arrondi

Soit A une matrice inversible, on cherche à estimer l'influence sur la solution du système $Ax = b$ d'une erreur d'arrondi sur le second membre b

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x + \delta x) = b + \delta b \end{cases}$$

implique

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Méthodes itératives: motivations

- Matrice creuse: $\mathcal{O}(n)$ termes non nuls
- Méthodes itératives: calcul d'une suite x^n faisant intervenir que des produits matrice - vecteur
- Pour une matrice creuse, une itération coûte $\mathcal{O}(n)$ opérations flottantes
- Le problème à résoudre est la maîtrise de la convergence de la suite x^n vers x et du nombre d'itérations
- Coût pour une matrice creuse et une convergence en nit itérations

$$\mathcal{O}(n.nit)$$

matrices creuses: exemple du Laplacien 2D sur maillage Cartésien

Maillage cartésien uniforme $(n+1)\times(n+1)$ du carré $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ de pas $\Delta x=\frac{1}{n+1}$ Laplacien avec conditions limites homogènes:

$$\left\{\begin{array}{r} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f \text{ sur } \Omega \\ u(x)=0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Discrétisation:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(\Delta x)^2}(4u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i-1,j}-u_{i,j+1}-u_{i,j-1}=f_{i,j} \text{ pour } i,j=1,\cdots,n \\ u_{i,j}=0 \text{ pour } i=0,n+1, j=0,\cdots,n+1 \text{ et } j=0,n+1, i=0,\cdots,n+1 \end{array}\right.$$

Système linéaire: numérotation des inconnues $k=i+(j-1)n$ de 1 à $N=n^2$

$$AU=F \text{ avec } A \text{ matrice pentadiagonale de largeur de bande } q=n$$

Coût d'une méthode directe LU: $2Nn^2=2N^2$
Coût d'une méthode itérative convergente en nit itérations: $10N.nit$

Méthode de Richardson

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ solution de

$$Ax = b.$$

Méthode de Richardson: soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on construit une suite de solution x^k de la forme

$$x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k).$$

On a donc

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha A)(x^k - x),$$
$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha A)^k (x^1 - x),$$
$$B = (I - \alpha A)$$

- Convergence: ssi $\rho(B) < 1$
- Taux de convergence: $\|B^k\|^{1/k} \to \rho(I - \alpha A)$

Méthode de Richardon pour les matrices SDP

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ SDP (Symétrique Définie Positive) et $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$ ses valeurs propres par ordre croissant

$$\rho(I - \alpha A) = max\Big(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|\Big)$$

$$\alpha_{opt} = argmin_{\alpha \in \mathbb{R}} max\Big(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|\Big)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}, \quad \rho(I - \alpha_{opt} A) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} < 1$$

Problème: on ne connait pas les valeurs propres de A
Voir Exercice: Méthode de Richardson à pas variable

Méthode de Richardon pour les matrices SDP

Nombre d'itérations pour une précision fixée:

$$\|x^{k+1} - x\|_2 \leq \Big(\rho(I - \alpha_{opt} A)\Big)^k \|x^1 - x\|_2,$$

$$\|x^{k+1} - x\|_2 \leq \Big(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\Big)^k \|x^1 - x\|_2,$$

On cherche le nb d'itération k pour atteindre une précision ϵ, ie

$$\Big(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\Big)^k \leq \epsilon,$$

$$k \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(\frac{1+\frac{1}{\kappa}}{1-\frac{1}{\kappa}})}$$

Pour κ grand:

$$k \gtrsim \frac{\kappa}{2} \ln(\frac{1}{\epsilon})$$

Méthode de Richardon à pas variable pour les matrices SDP

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ SDP (Symétrique Définie Positive).

$$\text{On pose } e^k = x - x^k,\ r^k = Ae^k = b - Ax^k,$$

et on considère l'algorithme itératif: x^1 donné et pour $k = 1, \cdots$

$$\begin{cases} \alpha^k = \dfrac{(r^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)}, \\ x^{k+1} = x^k + \alpha^k\, r^k. \end{cases}$$

On montre que

$$\alpha^k = \text{Argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}}(Ae^{k+1}, e^{k+1}) = \alpha^2(Ar^k, r^k) - 2\alpha(r^k, r^k) + (Ae^k, e^k),$$

et

$$(Ae^{k+1}, e^{k+1}) = \Big(1 - \frac{(r^k, r^k)^2}{(Ar^k, r^k)(A^{-1}r^k, r^k)}\Big)(Ae^k, e^k),$$

d'où

$$(Ae^{k+1}, e^{k+1}) \leq \Big(1 - \frac{1}{\text{Cond}_2(A)}\Big)(Ae^k, e^k)$$

Méthode de Richardon à pas variable pour les matrices SDP: algorithme

$$Ax = b \text{ avec } A \text{ matrice SDP}$$

- Choix de la précision ϵ sur le résidu relatif
- Initialisation: $x^1, r^1 = b - Ax^1, nr = nr^0 = \|r^1\|$
- Itérer tant que $\frac{nr}{nr^0} \geq \epsilon$
  - $p^k = Ar^k$
  - $\alpha^k = \frac{(r^k, r^k)}{(p^k, r^k)}$
  - $x^{k+1} = x^k + \alpha^k r^k$
  - $r^{k+1} = r^k - \alpha^k p^k$
  - $nr = \|r^{k+1}\|$

Méthode de Richardon préconditionnée

Préconditionnement: matrice $C \in \mathcal{M}_n$ inversible

$$x^{k+1} = x^k + \alpha C^{-1}(b - Ax^k)$$

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha C^{-1}A)(x^k - x)$$

$$B = (I - \alpha C^{-1}A)$$

On cherche un préconditionnement C tel que

- $C \sim \alpha\ A$ ie $\rho(I - \alpha C^{-1}A) << 1$
- le système $Cy = r$ est peu coûteux à résoudre

Exemple des matrices et préconditionnements SDP

$A, C \in \mathcal{M}_n$ symétriques définies positives.

Soient $y = C^{1/2}x$, $y^k = C^{1/2}x^k$, $c = C^{-1/2}b$ on a

$$\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right)y = c,$$

La matrice $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ est SDP, et

$$y^{k+1} = y^k + \alpha\left(c - C^{-1/2}AC^{-1/2}y^k\right)$$

Convergence ssi $\rho(I - \alpha C^{-1/2}AC^{-1/2}) < 1$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

$$\rho(I - \alpha_{opt}C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \frac{\lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) - \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

Exemple des matrices et préconditionnements SDP

$A, C \in \mathcal{M}_n$ symétriques définies positives.

Soient $y = C^{1/2}x$, $y^k = C^{1/2}x^k$, $c = C^{-1/2}b$ on a

$$\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right)y = c,$$

La matrice $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ est SDP, et

$$y^{k+1} = y^k + \alpha\left(c - C^{-1/2}AC^{-1/2}y^k\right)$$

Convergence ssi $\rho(I - \alpha C^{-1/2}AC^{-1/2}) < 1$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

$$\rho(I - \alpha_{opt}C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \frac{\lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) - \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

Méthode de Richardon préconditionnée à pas variable pour les matrices et préconditionnements SDP: algorithme

Soient A et C SDP et le système $Ax = b$.
On applique l'algorithme de Richardon à pas variable au système

$$C^{-1/2}AC^{-1/2}y = C^{-1/2}b.$$

Il se formule comme précédemment avec la matrice $\widetilde{A} = C^{-1/2}AC^{-1/2}$, le second membre $c = C^{-1/2}b$, les itérés $y^k = C^{1/2}x^k$ et les résidus $\tilde{r}^k = C^{-1/2}r^k$.
En repassant à A, x, r on obtient:

- Choix de la précision ϵ sur le résidu relatif
- Initialisation: $x^1, r^1 = b - Ax^1, nr = nr^0 = \|r^1\|$
- Itérer tant que $\frac{nr}{nr^0} \geq \epsilon$
  - $q^k = C^{-1}r^k$
  - $p^k = Aq^k$
  - $\alpha^k = \frac{(q^k, r^k)}{(p^k, q^k)}$
  - $x^{k+1} = x^k + \alpha^k q^k$
  - $r^{k+1} = r^k - \alpha^k p^k$
  - $nr = \|r^{k+1}\|$

Exemples de préconditionnements

$$A = D - E - F$$

avec D diagonale de A (supposée inversible), $D - E = \text{tril}(A)$, $D - F = \text{triu}(A)$

- Jacobi:

$$C = D$$

- Gauss Seidel

$$C = D - E \text{ ou } C = D - F$$

- SOR (Successive over relaxation) $\omega \in (0, 2)$

$$C = \frac{D}{\omega} - E$$

- SSOR (Symmetric Successive over relaxation) $\omega \in (0, 2)$

$$C = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) D^{-1} \left(\frac{D}{\omega} - F\right)$$

Jacobi

$C = D$ et $\alpha = 1$

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$$
$$Dx^{k+1} = b - (A - D)x^k$$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j}x_j^k$$

Gauss Seidel $A = D - E - F$

$C = D - E$ et $\alpha = 1$

$$x^{k+1} = x^k + (D - E)^{-1}(b - Ax^k)$$
$$(D - E)x^{k+1} = b + Fx^k$$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k$$

SOR $A = D - E - F$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$\begin{cases} A_{i,i}\tilde{x}_i^{k+1} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k \\ x_i^{k+1} = \omega\tilde{x}_i^{k+1} + (1-\omega)x_i^k \end{cases}$$

Vérification de $C = \frac{D}{\omega} - E$.

$$A_{i,i}\Big(\frac{x_i^{k+1}}{\omega} - \frac{(1-\omega)}{\omega}x_i^k\Big) = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k$$

$$(\frac{D}{\omega} - E)x^{k+1} = b - \Big(-F - \frac{(1-\omega)}{\omega}D\Big)x^k = (\frac{D}{\omega} - E)x^k + (b - Ax^k)$$

Convergence de SOR pour $\alpha = 1$

Si A est une matrice SDP, alors $\rho\Big(I - (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}A\Big) < 1$ pour $\omega \in]0, 2[$ et la méthode SOR converge pour $\omega \in]0, 2[$.

On va montrer que pour tous A SDP et M inversible telle que $\Big({}^tM + M - A\Big)$ SDP alors

$$\rho(I - M^{-1}A) < 1$$

Preuve: on considère la norme sur $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_A^2 = (Ax, x)$ et on va montrer que

$$\|I - M^{-1}A\|_A^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(I - M^{-1}A)x\|_A^2}{\|x\|_A^2} < 1$$

Soit $x \neq 0$, on définit $y \neq 0$ tel que $Ax = My$

$$\begin{aligned}
\|(I - M^{-1}A)x\|_A^2 &= (A(x - y), (x - y)) \\
&= \|x\|_A^2 + (Ay, y) - 2(Ax, y) \\
&= \|x\|_A^2 + (Ay, y) - 2(My, y) \\
&= \|x\|_A^2 - (({}^tM + M - A)y, y)
\end{aligned}$$

Convergence de SOR pour $\alpha = 1$ (suite)

En utilisant $M +^t M - A$ SDP et l'équivalence des normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\star = \|A^{-1}M.\|_A$, on déduit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$((^tM + M - A)y, y) \geq (1 - C)\|x\|_A^2$$

et donc $\|I - M^{-1}A\|_A^2 \leq 1 - C < 1$.
On conclut pour la converge de SOR avec

$$^tM + M - A = \frac{D}{\omega} - E + \frac{D}{\omega} - F - D + E + F = (\frac{2}{\omega} - 1)D$$

SDP ssi $\omega \in]0, 2[$.
Rq: SOR coincide avec GS pour $\omega = 1$.