Partiel Mathématiques Appliquées L3 MASS, 12 novembre 2019. Aucuns documents autorisés. Durée 2h.

Exercice 1 : Soient $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$, et soit $\lambda > 0$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ \Big((f'(x^{(k)}))^2 + \lambda\Big)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f'(x^{(k)})f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Pour quelle valeur de λ obtient-on l'algorithme de Newton ? Expliquer pourquoi, contrairement à l'algorithme de Newton, cet algorithme est toujours bien défini.

Corrigé : comme $\lambda > 0$, $(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda$ ne s'annule jamais et donc la méthode est toujours définie. Ce n'est pas le cas de l'algorithme de Newton qui s'obtient pour $\lambda = 0$ et qui n'est défini que si $f'(x^{(k)}) \neq 0$.

(2) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta^{(k)} \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Avec cette définition de $\theta^{(k)}$, montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (x^{(k)} - \bar{x})\Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big).$$

Corrigé : Comme $f(\bar{x}) = 0$ on a

$$(x^{(k+1)} - \bar{x} + \bar{x} - x^{(k)}) = -\frac{f'(x^{(k)})(f(x^{(k)}) - f(\bar{x}))}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda} = -\frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}$$

et donc

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = (x^{(k)} - \bar{x})\Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big).$$

(3) En utilisant la continuité de f', montrer que

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big) = \frac{\lambda}{(f'(\bar{x}))^2 + \lambda}.$$

Corrigé : d'après la continuité de f' on a

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} f'(\theta^{(k)}) = \lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} f'(x^{(k)}) = f'(\bar{x}),$$

et donc comme $\lambda > 0$ on a

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big) = \frac{\lambda}{(f'(\bar{x}))^2 + \lambda} < 1.$$

(4) Déduire de la question précédente qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

Corrigé : Comme f' est une fonction continue, on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|,$$

avec par exemple $\beta = \frac{\frac{1}{2}(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}$. Comme $\lambda > 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$ on a $\beta < 1$.

(5) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

Corrigé : on déduit de la question précédente que si $x^{(k)} \in I_\alpha$ alors $|x^{(k+1)} - \bar{x}| < \alpha\beta < \alpha$ et donc $x^{(k+1)} \in I_\alpha$. On en déduit par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ puis que

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \beta^k |x^{(0)} - \bar{x}|,$$

et donc que

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

(6) On suppose $x^{(0)} \in I_\alpha$ et $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Calculer la constante $0 < \gamma < 1$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = \gamma.$$

Corrigé : il résulte des questions (2), (3) et (5) que

$$\gamma = \frac{\lambda}{(f'(\bar{x}))^2 + \lambda}.$$

Exercice 2 : Soit A une matrice carrée d'ordre n Symétrique Définie Positive (SDP). On note $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Précisément, on a pour tous $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad E_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \qquad F_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

On considère le système linéaire

$$Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné et on note $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution.

On considère la méthode itérative suivante pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (D - E)y^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \\ \\ (D - F)x^{(k+1)} = Ey^{(k+1)} + b. \end{cases}$$

(1) On note $e^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc tel que $e_i^{(i)} = 1$ et $e_j^{(i)} = 0$ pour tous $i \neq j$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire canonique. Montrer que $A_{i,i} = \langle Ae^{(i)}, e^{(i)} \rangle$.

Corrigé :

$$\langle Ae^{(i)}, e^{(i)}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{k,l}e_l^{(i)}e_k^{(i)} = A_{i,i},$$

(2) Montrer que $A_{i,i} \neq 0$ pour tous $i = 1, \cdots, n$ en utilisant que la matrice A est SDP. En déduire que la matrice D est inversible.

Corrigé : Comme A est SDP et que $e^{(i)} \neq 0$, on déduit que $(Ae^{(i)}, e^{(i)}) > 0$. On en déduit que $det(D) = \Pi_{i=1}^{n} A_{i,i} > 0$ et donc que A est inversible.

(3) Déduire de la question précédente que les matrices $D - E$ et $D - F$ sont inversibles.

Corrigé : comme $det(D-E) = det(D-F) = det(D)$ on deduit de la question précédente que $D - E$ et $D - F$ sont inversibles.

(4) On note $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$ et $f^{(k)} = \bar{x} - y^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression des matrices B_1 et B_2 telles que

$$f^{(k+1)} = B_1 e^{(k)},\ k \in \mathbb{N},$$
$$e^{(k+1)} = B_2 f^{(k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Corrigé : en utilisant que $b = A\bar{x}$ et $A = D - E - F$ on a

$$(D-E)(\bar{x} - y^{(k+1)}) = (D-E)\bar{x} - Fx^{(k)} - (D-E-F)\bar{x} = F(\bar{x} - x^{(k)}),$$

d'où $B_1 = (D-E)^{-1}F$. De même on a

$$(D-F)(\bar{x} - x^{(k+1)}) = (D-F)\bar{x} - Ey^{(k+1)} - (D-E-F)\bar{x} = E(\bar{x} - y^{(k+1)}),$$

d'où $B_2 = (D-F)^{-1}E$.

(5) Déduire de la question précédente l'expression de la matrice B telle que

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)},\ k \in \mathbb{N},$$

et donner une condition nécessaire et suffisante vue en cours pour que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ quel que soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé : on a

$$e^{(k+1)} = B_2 f^{(k+1)} = B_2 B_1 e^{(k)},$$

d'où $B = B_2B_1$. On en déduit que $e^{(k)} = B^k e^{(0)}$. D'après le cours on sait que $\lim_{k\to+\infty} e^{(k)} = 0$ quel que soit $e^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(B) < 1$. Donc de façon équivalente $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ quel que soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(B) < 1$.

(6) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B)$, qu'en déduisez vous ?

Corrigé :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$B = B_2 B_1 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\rho(B) = \frac{1}{4}$ et donc que l'algorithme converge pour cette matrice.