Partiel Mathématiques Appliquées L3 MASS, 12 novembre 2019. Aucuns documents autorisés. Durée 2h.

Exercice 1 : Soient $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$, et soit $\lambda > 0$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ \Big((f'(x^{(k)}))^2 + \lambda\Big)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f'(x^{(k)})f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Pour quelle valeur de λ obtient-on l'algorithme de Newton ? Expliquer pourquoi, contrairement à l'algorithme de Newton, cet algorithme est toujours bien défini.

(2) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta^{(k)} \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Avec cette définition de $\theta^{(k)}$, montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (x^{(k)} - \bar{x})\Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big).$$

(3) En utilisant la continuité de f', montrer que

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big) = \frac{\lambda}{(f'(\bar{x}))^2 + \lambda}.$$

(4) Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(5) Démontrer par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

(6) On suppose $x^{(0)} \in I_\alpha$ et $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Calculer la constante $0 < \gamma < 1$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = \gamma.$$

Exercice 2 : Soit A une matrice carrée d'ordre n Symétrique Définie Positive (SDP). On note $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Précisément, on a pour tous $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad E_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \qquad F_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

On considère le système linéaire

$$Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné et on note $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution.

On considère la méthode itérative suivante pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (D-E)y^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \\ \\ (D-F)x^{(k+1)} = Ey^{(k+1)} + b. \end{cases}$$

(1) On note $e^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc tel que $e_i^{(i)} = 1$ et $e_j^{(i)} = 0$ pour tous $i \neq j$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire canonique.

Montrer que $A_{i,i} = \langle Ae^{(i)}, e^{(i)} \rangle$.

(2) Montrer que $A_{i,i} \neq 0$ pour tous $i = 1, \cdots, n$ en utilisant que la matrice A est SDP. En déduire que la matrice D est inversible.

(3) Montrer en utilisant la question précédente que les matrices $D - E$ et $D - F$ sont inversibles.

(4) On note $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$ et $f^{(k)} = \bar{x} - y^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression des matrices B_1 et B_2 telles que

$$f^{(k+1)} = B_1 e^{(k)},\ k \in \mathbb{N},$$
$$e^{(k+1)} = B_2 f^{(k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

(5) Déduire de la question précédente l'expression de la matrice B telle que

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)},\ k \in \mathbb{N},$$

et donner une condition nécessaire et suffisante vue en cours pour que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ quel que soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(6) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le rayon spectral de la matrice B noté $\rho(B)$, qu'en déduisez vous ?