Corrigé du partiel Analyse Numérique L3 MASS, 13 novembre 2018. Aucuns documents autorisés. Durée 2h.

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante au sens où

$$|A_{i,i}| > \sum_{j=1}^{i-1} |A_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |A_{i,j}| \text{ pour tous } i = 1, \cdots, n.$$

On note $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale extraite de A définie par : pour tous $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

(1) Montrer que $A_{i,i}$ est non nul pour tout $i = 1, \cdots, n$, en déduire que la matrice D est inversible.

Corrigé : Comme A est une matrice à diagonale strictement dominante on a pour tous $i = 1, \cdots, n$

$$|A_{i,i}| > \sum_{j=1}^{i-1} |A_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |A_{i,j}| \geq 0,$$

ce qui montre que $A_{i,i} > 0$ donc que $A_{i,i}$ est non nul pour tous $i = 1, \cdots, n$ et donc que la matrice diagonale D est inversible.

(2) On admettra que la matrice A est inversible. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on note $\bar{x}$ la solution du système linéaire $A\bar{x} = b$. Pour résoudre le système $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

Etant donné $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on définit $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ pour $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$A_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j^{(k)}, \; i = 1, \cdots, n.$$

Montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B(x^{(k)} - \bar{x}), \; k \in \mathbb{N}.$$

avec

$$B = I - D^{-1}A.$$

Corrigé : Sous forme vectorielle, la méthode itérative s'écrit :

$$Dx^{(k+1)} = b - (A - D)x^{(k)}, \; k \in \mathbb{N}.$$

En utilisant que $b = A\bar{x}$ on a

$$D(x^{(k+1)} - \bar{x}) = A\bar{x} - Ax^{(k)} + D(x^{(k)} - \bar{x})$$

et donc

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (I - D^{-1}A)(x^{(k)} - \bar{x}).$$

(3) En utilisant un résultat du cours, donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice B pour que la suite $x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ converge vers $\bar{x}$ quel que soit $b \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé : D'après le cours, la suite converge vers $\bar{x}$ quel que soit $b \in \mathbb{R}^n$ ssi $\rho(B) < 1$.

(4) On admettra que la norme matricielle induite par la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$ vérifie

$$\|C\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |C_{i,j}|,$$

pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer $\sum_{j=1}^{n} |B_{i,j}|$ pour $i = 1, \cdots, n$ donné et en déduire que $\|B\|_\infty < 1$ en utilisant la propriété de diagonale dominance de la matrice A.

Corrigé : On a

$$\sum_{j=1} |B_{i,j}| = \frac{1}{|A_{i,i}|} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} |A_{i,j}| + \sum_{j=i+1}^{n} |A_{i,j}| \Big).$$

On en déduit d'après la diagonale dominance stricte de la matrice A que

$$\sum_{j=1} |B_{i,j}| < 1 \text{ pour tous } i = 1, \cdots, n$$

et donc $\|B\|_\infty < 1$.

(5) On rappelle que la norme induite vérifie $\|Cx\|_\infty \leq \|C\|_\infty \|x\|_\infty$ pour tous $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$.
En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty,$$

Corrigé : Comme $(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B(x^{(k)} - \bar{x})$, on déduit de la propriété de la norme matricielle induite que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty.$$

(6) Montrer en utilisant les deux questions précédentes que $\lim_{k \to +\infty} \|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty = 0$ et donc que la méthode itérative converge vers $\bar{x}$ quel que soit $b \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé : De

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty.$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$, on déduit par récurrence que

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \leq (\|B\|_\infty)^k \|x^{(0)} - \bar{x}\|_\infty.$$

Comme $\|B\|_\infty < 1$, il résulte que

$$\lim_{k \to +\infty} \|x^{(k+1)} - \bar{x}\|_\infty = 0,$$

donc la méthode itérative converge vers $\bar{x}$ quel que soit b.

(7) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $B = I - D^{-1}A$ et $\|B\|_\infty$, qu'en déduisez vous sur la méthode itérative appliquée à cette matrice A ?

Corrigé : On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\|B\|_\infty = 3/4 < 1$. On en déduit que la méthode itérative converge pour cette matrice.

(8) En considérant la matrice A de la question (7), calculer $\rho(B)$. Qu'en déduisez vous ?

Corrigé : les valeurs propres de B sont les racines λ de $\lambda^2 - 3/8 = 0$ donc on en déduit que $\rho(B) = \sqrt{3/8} < 1$. On en déduit également que la méthode itérative converge pour cette matrice.

Exercice 2.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. On considère la suite définie par $x^{(0)}$, $x^{(1)} \in \mathbb{R}$ et

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\frac{(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}), \quad k \geq 1.$$

(1) Par le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\xi_k \in (\bar{x}, x^{(k)})$ et $\theta_k \in (x^{(k-1)}, x^{(k)})$ tels que
$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\xi_k)(x^{(k)} - \bar{x})$
et
$f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) = f'(\theta_k)(x^{(k)} - x^{(k-1)})$.
En déduire l'expression de γ_k tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \gamma_k (x^{(k)} - \bar{x}), \quad k \geq 1.$$

Corrigé : En utilisant $f(\bar{x}) = 0$ on a

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = x^{(k)} - \bar{x} - \frac{(f(x^{(k)}) - f(\bar{x}))(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}.$$

On en déduit que

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = (1 - \frac{f'(\xi^{(k)})}{f'(\theta^{(k)})})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

donc $\gamma_k = (1 - \frac{f'(\xi^{(k)})}{f'(\theta^{(k)})})$.

(2) Montrer que $\lim_{(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \to (\bar{x}, \bar{x})} \gamma_k = 0$. On supposera que $x^{(k)} \neq x^{(k-1)}$.

Corrigé : Comme f' est continue et $f'(\bar{x}) \neq 0$ on remarque que

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} (1 - \frac{f'(\xi^{(k)})}{f'(\theta^{(k)})}) = (1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}) = 0.$$

(3) Soit $I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ et $k \geq 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que si $x^{(k)} \in I_\alpha$, $x^{(k-1)} \in I_\alpha$ et $x^{(k)} \neq x^{(k-1)}$, alors

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

Corrigé : On déduit de la question précédente que l'on peut choisir α tel que

(i) $f(x)$ est strictement monotone sur $\bar{I}_\alpha$ (ce qui est possible car $f'(\bar{x}) \neq 0$ et f' est continue)

(ii) $-\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{f'(x)}{f'(y)} \leq \frac{1}{2}$ pour tous $(x, y) \in \bar{I}_\alpha \times \bar{I}_\alpha$ d'après la définition de la limite et $1/2 > 0$.

Il en résulte que si $x^{(k)} \neq x^{(k-1)} \in I_\alpha$ alors $f(x^{(k)}) \neq f(x^{(k-1)})$ et

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|x^{(k)} - \bar{x}|,$$

ce qui répond à la question avec $\beta = 1/2$ (notez que l'on pourrait prendre pour β toute valeur comprise strictement entre 0 et 1).

(4) On considère les choix de α et β de la question (3). Montrer par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et si $x^{(0)} \neq x^{(1)}$, alors

$$x^{(k)} \in I_\alpha,\ x^{(k-1)} \in I_\alpha,\ x^{(k)} \neq x^{(k-1)}, \quad \forall k \geq 1.$$

On supposera que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \geq 0$.

Corrigé : Il résulte de la question précédente que si $x^{(k)} \neq x^{(k-1)} \in I_\alpha$ alors $f(x^{(k)}) \neq f(x^{(k-1)})$ et

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|x^{(k)} - \bar{x}|.$$

On en déduit que $|x^{(k+1)} - \bar{x}| < \alpha/2$ donc $x^{(k+1)} \in I_\alpha$. Par ailleurs, par définition de la suite, on a soit $f(x^{(k)}) = 0$, soit $x^{(k+1)} \neq x^{(k)}$. Le cas $f(x^{(k)}) = 0$ implique $x^{(l)} = \bar{x}$ pour tous $l \geq k$ et dans ce cas la suite a donc convergé vers $\bar{x}$, on exclut donc ce cas de figure par la suite.

Par récurrence, on déduit que si $x^{(0)}$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et si $x^{(0)} \neq x^{(1)}$ alors

$$x^{(k)} \in I_\alpha,\ x^{(k-1)} \in I_\alpha,\ x^{(k)} \neq x^{(k-1)}, \quad \forall k \geq 1.$$

(5) On suppose que $x^{(0)} \in I_\alpha$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et $x^{(0)} \neq x^{(1)}$. Montrer, en utilisant les résultats des questions (3) et (4), que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

Corrigé : On a

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq 1/2|x^{(k)} - \bar{x}| \quad \forall k \geq 1.$$

d'où

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq (1/2)^{k-1}|x^{(1)} - \bar{x}| \quad \forall k \geq 2,$$

ce qui montre que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ au moins localement linéairement.

(6) On suppose que $x^{(0)} \in I_\alpha$, $x^{(1)} \in I_\alpha$ et $x^{(0)} \neq x^{(1)}$. Calculer la limite de $\dfrac{x^{(k+1)} - \bar{x}}{x^{(k)} - \bar{x}}$ lorsque $k \to +\infty$.

Corrigé : D'après la question (2) et d'après la convergence de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\bar{x}$, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{(k+1)} - \bar{x}}{x^{(k)} - \bar{x}} = 0,$$

ce qui montre que la suite converge super linéairement.