Corrigé exercice 1 Examen final L3 MASS, 18 décembre 2018. Aucuns documents autorisés. Durée 2h.

Exercice 1 :

On considère un réel $\lambda > 0$, un réel $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ et l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0, \\ x(0) = \bar{x}_0. \end{cases}$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation en temps uniforme : $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \cdots, m$. On considère le schéma explicite suivant : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda(1 - \lambda\frac{\Delta t}{2})\ x_k,\ k = 0, \cdots, m-1.$$

(1) Calculer la solution exacte de l'EDO notée $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$.

Corrigé : on a $\Big(\ln(|\bar{x}(t)|)\Big)' = -\lambda$ et donc $\ln(\frac{|\bar{x}(t)|}{|\bar{x}(0)|}) = -\lambda t$. On en déduit que $|\bar{x}(t)| = \bar{x}_0 e^{-\lambda t}$. Il résulte que $\bar{x}(t)$ ne s'annule pas (sauf si $\bar{x}_0 = 0$, auquel cas $\bar{x}(t) = 0$ pour tous $t \in \mathbb{R}^+$). Comme $\bar{x}(t)$ est une fonction continue qui ne s'annule pas, elle a donc un signe constant qui est celui de $\bar{x}_0$. D'où

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{-\lambda t}.$$

(2) Montrer que $x_{k+1} = \rho(\lambda\Delta t)x_k$ pour $k = 0, \cdots, m-1$ avec $\rho(s) = \frac{1}{2}s^2 - s + 1$.

Corrigé : On a $x_{k+1} = (1 - \lambda\Delta t(1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t))x_k$ d'où en posant $s = \lambda\Delta t$ on a bien $x_{k+1} = \rho(\lambda\Delta t)x_k$.

(3) En déduire la solution du schéma x_k pour $k = 0, \cdots, m$.

Corrigé : on déduit par récurrence que $x_k = (\rho(\lambda\Delta t))^k x_0$.

(4) En étudiant la fonction $\rho(s)$, montrer que $|\rho(s)| \leq 1$ équivaut à $0 \leq s \leq 2$.

Corrigé : la fonction $\rho(s)$ est un polynôme du second degré convexe dont le minimum se situe au point s tel que $\rho'(s) = 1 - s = 0$ soit $s = 1$ avec $\rho(1) = \frac{1}{2}$. Comme $\rho(0) = \rho(2) = 2$ on a l'équivalence demandée.

(5) En déduire que $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$.

Corrigé : Une condition suffisante pour que $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ est que $|\rho(\lambda\Delta t)| \leq 1$, et donc que $0 \leq \lambda\Delta t \leq 2$ d'où d'après la question précédente la condition suffisante $\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$.

(6) On rappelle que $\bar{x}(t)$ est la solution exacte de l'EDO. Montrer que l'erreur de consistance du schéma

$$r_k = \frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t} + \lambda(1 - \lambda\frac{\Delta t}{2})\ \bar{x}(t_k),$$

vérifie

$$|r_k| \leq |\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t$$

pour tous $k = 0, \cdots, m-1$. On pourra utiliser le fait que $\bar{x}'(t) = -\lambda\bar{x}(t)$ et que

$$\frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{x}'(t)dt.$$

Corrigé : on a

$$r_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\bar{x}'(t) + \lambda(1-\lambda\frac{\Delta t}{2})\ \bar{x}(t_k)\Big)dt.$$

Comme $-\lambda\bar{x}(t_k) = \bar{x}'(t_k)$, on a

$$r_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\bar{x}'(t) - \bar{x}'(t_k))dt - \lambda^2\frac{\Delta t}{2}\ \bar{x}(t_k),$$

d'où

$$|r_k| \leq \sup_{s\in[0,T]} |\bar{x}''(s)|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-t_k)dt + \lambda^2\frac{\Delta t}{2}\ \bar{x}(t_k),$$

et donc en utilisant que $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{-\lambda t}$ et $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t-t_k)dt = \frac{\Delta t}{2}$ on a

$$|r_k| \leq \frac{1}{2}|\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t + \frac{1}{2}|\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t = |\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t.$$

(7) On définit les erreurs $e_k = \bar{x}(t_k) - x_k$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer qu'elles vérifient la relation :

$$\frac{e_{k+1}-e_k}{\Delta t} + \lambda(1-\lambda\frac{\Delta t}{2})\ e_k = r_k \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m-1.$$

Corrigé : On soustrait la définition schéma

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t} + \lambda(1-\lambda\frac{\Delta t}{2})\ x_k = 0,$$

de celle du résidu

$$\frac{\bar{x}(t_{k+1})-\bar{x}(t_k)}{\Delta t} + \lambda(1-\lambda\frac{\Delta t}{2})\ \bar{x}(t_k) = r_k,$$

et on obtient l'équation demandée.

(8) En supposant que $\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$, montrer que l'on a

$$|e_k| \leq |e_0| + t_k|\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t,$$

pour tous $k = 0, \cdots, m$.

Corrigé : on obtient

$$e_{k+1} = \rho(\lambda\Delta t)e_k + \Delta t r_k,$$

donc en supposant que $\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$ on a $|\rho(\lambda\Delta t)| \leq 1$ puis

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \Delta t\ |r_k|,\ k = 0, \cdots, m-1.$$

En sommant cette inégalité pour $k = 0, \cdots, l-1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{l-1}|e_{k+1}| \leq \sum_{k=0}^{l-1}|e_k| + \Delta t\sum_{k=0}^{l-1}|r_k|,$$

d'où

$$|e_l| \leq |e_0| + \Delta t\sum_{k=0}^{l-1}|r_k| \leq |e_0| + t_l|\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t,$$

pour tous $l = 0, \cdots, m$.