Examen final L3 MASS, 18 décembre 2018. Aucuns documents autorisés. Durée 2h.

Exercice 1 :

On considère un réel $\lambda > 0$, un réel $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ et l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0, \\ x(0) = \bar{x}_0. \end{cases}$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation en temps uniforme : $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \cdots, m$. On considère le schéma explicite suivant : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda(1 - \lambda\frac{\Delta t}{2})\ x_k,\ k = 0, \cdots, m-1.$$

(1) Calculer la solution exacte de l'EDO notée $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$.

(2) Montrer que $x_{k+1} = \rho(\lambda\Delta t)x_k$ pour $k = 0, \cdots, m-1$ avec $\rho(s) = \frac{1}{2}s^2 - s + 1$.

(3) En déduire la solution du schéma x_k pour $k = 0, \cdots, m$.

(4) En étudiant la fonction $\rho(s)$, montrer que $|\rho(s)| \leq 1$ équivaut à $0 \leq s \leq 2$.

(5) En déduire que $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$.

(6) On rappelle que $\bar{x}(t)$ est la solution exacte de l'EDO. Montrer que l'erreur de consistance du schéma

$$r_k = \frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t} + \lambda(1 - \lambda\frac{\Delta t}{2})\ \bar{x}(t_k),$$

vérifie

$$|r_k| \leq |\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t$$

pour tous $k = 0, \cdots, m-1$. On pourra utiliser le fait que $\bar{x}'(t) = -\lambda\bar{x}(t)$ et que

$$\frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{x}'(t)dt.$$

(7) On définit les erreurs $e_k = \bar{x}(t_k) - x_k$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer qu'elles vérifient la relation :

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} + \lambda(1 - \lambda\frac{\Delta t}{2})\ e_k = r_k \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m-1.$$

(8) En supposant que $\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$, montrer que l'on a

$$|e_k| \leq |e_0| + t_k|\bar{x}_0|\lambda^2\Delta t,$$

pour tous $k = 0, \cdots, m$.

Exercice 2 : On considère $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$. On se donne un réel $\lambda > 0$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ \Big((f'(x^{(k)}))^2 + \lambda\Big)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f'(x^{(k)})f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Pour quelle valeur de λ obtient-on l'algorithme de Newton ? Expliquer pourquoi, contrairement à l'algorithme de Newton, cet algorithme est toujours bien défini.

(2) D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\theta^{(k)} \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Avec cette définition de $\theta^{(k)}$, montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (x^{(k)} - \bar{x})\Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big).$$

(3) En utilisant la continuité de f', montrer que

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \Big(1 - \frac{f'(x^{(k)})f'(\theta^{(k)})}{(f'(x^{(k)}))^2 + \lambda}\Big) = \frac{\lambda}{(f'(\bar{x}))^2 + \lambda}.$$

(4) Déduire de la question précédente qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(5) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$, puis montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

(6) On suppose $x^{(0)} \in I_\alpha$ et $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|}$ converge vers une limite lorsque $k \to +\infty$ et calculer la constante $0 < \gamma < 1$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = \gamma.$$