TD Analyse Numérique Licence L3 MASS, TD1

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible telle que $A_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'algorithme de Gauss Seidel pour résoudre le système linéaire $Ax = b$: on se donne $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et on calcule $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ pour $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$A_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j^{(k)},\ i = 1, \cdots, n.$$

(1) Montrer que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + L^{-1}\Big(b - Ax^{(k)}\Big),\ k \in \mathbb{N},$$

avec L la partie triangulaire inférieure de A ie la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$L_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} \text{ si } i \geq j, \\ 0 \text{ si } i < j. \end{cases},$$

(2) Soit $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution de $Ax = b$ et $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}, k \in \mathbb{N}.$$

avec $B = (I - L^{-1}A)$ puis

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)},$$

et donner la condition nécessaire et suffisante du cours pour que la suite $x^{(k)}$ converge vers x.

(3) En utilisant un résultat de cours, montrer que

$$\|e^{(k)}\|_2 \leq (\sqrt{\rho({}^tBB)})^k \|e^{(0)}\|_2.$$

(4) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et $b \in \mathbb{R}^2$ donné. Calculer la matrice d'itération $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'algorithme de Gauss Seidel et calculer les valeurs propre de B. En déduire si l'algorithme de Gauss Seidel converge ou non pour cette matrice A.

(5) Calculer $\sqrt{\rho({}^tBB)}$ pour la matrice A ci-dessus Qu'en déduisez vous sur la convergence de l'algorithme de Gauss Seidel pour cette matrice en comparaison avec la convergence de l'algorithme de Richardson à pas $\alpha = 1$ et avec la convergence de l'algorithme de Richardson à pas optimal ?

(6) En déduire une condition suffisante sur le nombre d'itérations k de l'algorithme de Gauss Seidel pour que

$$\frac{\|e^{(k)}\|_2}{\|e^{(0)}\|_2} \leq \epsilon$$

pour une précision $\epsilon > 0$ donnée.

Corrigé Exercice 1 :

(1) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale extraite de A défini par

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

On réécrit sous forme vectorielle la relation de définition de la suite $x^{(k)}$. On obtient

$$Dx^{(k+1)} = b - (L - D)x^{(k+1)} - (A - L)x^{(k)},$$

donc

$$Lx^{(k+1)} = Lx^{(k)} + b - Ax^{(k)}.$$

Comme $A_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, la matrice L est inversible et on obtient en multipliant les deux membres de l'égalité par L^{-1} que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + L^{-1}(b - Ax^{(k)}).$$

(2) D'après la question (1) on a

$$e^{(k+1)} = \bar{x} - x^{(k+1)} = \bar{x} - x^{(k)} - L^{-1}(b - Ax^{(k)}) = e^{(k)} - L^{-1}(b - Ax^{(k)}).$$

En remarquant que $A\bar{x} = b$ on obtient

$$e^{(k+1)} = e^{(k)} - L^{-1}(A\bar{x} - Ax^{(k)}) = e^{(k)} - L^{-1}Ae^{(k)} = (I - L^{-1}A)e^{(k)} = Be^{(k)}.$$

On en déduit par récurrence que

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}.$$

(3) On déduit de la question (2) que

$$\|e^{(k)}\|_2 = \|B^k e^{(0)}\|_2.$$

En appliquant les propriétés de la norme matricielle induite on a

$$\|B^k e^{(0)}\|_2 \leq \|B^k\|_2 \|e^{(0)}\|_2$$

et

$$\|B^k\|_2 \leq (\|B\|_2)^k.$$

D'après le cours, on sait que

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho({}^tBB)}.$$

En combinant ces relations on en déduit que

$$\|e^{(k)}\|_2 \leq \left(\sqrt{\rho({}^tBB)}\right)^k \|e^{(0)}\|_2.$$

(4) On calcule $B = I - L^{-1}A$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de B sont donc 0 et $\frac{1}{4}$ et donc $\rho(B) = \frac{1}{4}$. On en déduit que l'algorithme de Gauss Seidel converge pour cette matrice.

(5) On calcule ${}^tBB$:

$$ {}^tBB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} \end{pmatrix}. $$

Les valeurs propres de ${}^tBB$ sont donc 0 et $\frac{5}{16}$ et donc $\rho({}^tBB) = \frac{5}{16}$. On en déduit que l'algorithme de Gauss Seidel vérifie

$$ \|e^{(k)}\|_2 \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^k \|e^{(0)}\|_2. $$

On rappelle que l'algorithme de Richardson à pas α est définie par

$$ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}). $$

et vérifie pour une matrice A symétrique

$$ \|e^{(k)}\|_2 \leq \Big(\rho(I - \alpha A)\Big)^k \|e^{(0)}\|_2. $$

Les valeurs propres de A sont données par les racines du polynôme caractéristique

$$ det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3). $$

On obtient donc les valeurs propres de A : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ Pour $\alpha = 1$ on obtient donc

$$ \rho(I - A) = \max(|1 - 1|, |1 - 3|) = 2. $$

On en déduit que l'algorithme de Richardson à pas 1 ne converge pas. Le pas optimal est donné par $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{1}{2}$ et

$$ \rho(I - \alpha_{opt} A) = \max(|1 - \frac{1}{2}|, |1 - \frac{3}{2}|) = \frac{1}{2}. $$

On en déduit que l'algorithme de Richardson à pas optimal converge et vérifie

$$ \|e^{(k)}\|_2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \|e^{(0)}\|_2 \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^k \|e^{(0)}\|_2. $$

Donc les estimations obtenues donnent une meilleure convergence pour l'algorithme de Richardson à pas optimal que pour l'algorithme de Gauss Seidel pour cette matrice A.

(6) Une condition suffisante est donnée par

$$ (\frac{\sqrt{5}}{4})^k \leq \epsilon, $$

en prenant le logarithme (fonction croissante) des deux membres de l'inégalité on obtient que

$$ k ln(\frac{\sqrt{5}}{4}) \leq ln(\epsilon). $$

Comme $ln(\frac{\sqrt{5}}{4}) < 0$, on en déduit qu'une condition suffisante sur k est donnée par

$$ k \geq \frac{ln(\epsilon)}{ln(\frac{\sqrt{5}}{4})} = \frac{ln(\frac{1}{\epsilon})}{ln(\frac{4}{\sqrt{5}})}. $$

Exercice 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible telle que $A_{i,i} \neq 0$ pour tous $i = 1, \cdots, n$. On note $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Précisément, on a pour tous $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad E_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \qquad F_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

On considère le système linéaire

$$Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné et on note $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution.
On rappelle que l'algorithme de Richardson de pas $\alpha = 1$ préconditionné par une matrice inversible C s'écrit : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C^{-1}(b - Ax^{(k)}), \ k \in \mathbb{N}.$$

(1) On considère la méthode itérative $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$Dx^{(k+1)} = b + (E + F)x^{(k)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il s'agit de l'algorithme de Richardson de pas 1 préconditionné par la diagonale de A (méthode de Jacobi).

Calculer la matrice B_1 telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B_1(x^{(k)} - \bar{x}), \ k \in \mathbb{N}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B_1)$ et conclure sur la convergence de la méthode de Jacobi pour la matrice A.
Corrigé : On a

$$Dx^{(k+1)} = b + (D - A)x^{(k)},$$

comme D est inversible on a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}(b - A)x^{(k)}.$$

Il s'agit bien de l'algorithme de Richardson à pas 1 préconditionné par la diagonale (Jacobi).
On en déduit

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = x^{(k)} - \bar{x} + D^{-1}A(x^{(k)} - \bar{x}).$$

d'où

$$B_1 = I - D^{-1}A.$$

On obtient pour la matrice A :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de B_1 sont données par les racines du polynôme caractéristique :

$$det(B_1 - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{4},$$

d'où $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ et $\rho(B_1) = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit que l'algorithme de Jacobi converge pour la matrice A.

(2) On considère la méthode itérative $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$Dx^{(k+1)} = b + Fx^{(k+1)} + Ex^{(k)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il s'agit de l'algorithme de Richardson de pas 1 préconditionné par la partie triangulaire supérieure de A (méthode de Gauss Seidel).

Calculer la matrice d'itération B_2 telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B_2(x^{(k)} - \bar{x}),\ k \in \mathbb{N}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B_2)$ et conclure sur la convergence de la méthode de Gauss Seidel pour la matrice A.

Corrigé : On a

$$(D - F)x^{(k+1)} = b + Ex^{(k)} = b + (D - F - A)x^{(k)}$$

comme D est inversible, la matrice triangulaire $D - F$ est inversible et on obtient

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (D - F)^{-1}(b - A)x^{(k)}.$$

Il s'agit bien de l'algorithme de Richardson à pas 1 préconditionné par la partie triangulaire supérieure de A (méthode de Gauss Seidel). On en déduit

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = x^{(k)} - \bar{x} + (D - F)^{-1}A(x^{(k)} - \bar{x}).$$

d'où

$$B_1 = I - (D - F)^{-1}A.$$

On obtient pour la matrice A :

$$(D - F)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de B_2, matrice triangulaire, sont données par les éléments diagonaux : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ d'où $\rho(B_2) = \frac{1}{4} < 1$. On en déduit que l'algorithme de Gauss Seidel converge pour la matrice A.

(3) On considère la méthode itérative $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} D\widetilde{x}^{(k+1)} = b + Fx^{(k+1)} + Ex^{(k)}, \\ x^{(k+1)} = \omega\widetilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)} \end{cases}$$

Montrer qu'il s'agit de l'algorithme de Richardson de pas 1 préconditionné par $C = (\frac{1}{\omega}D - F)$, donc la méthode Successive Over Relaxation (SOR).

Calculer la matrice d'itération B_3 telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B_3(x^{(k)} - \bar{x}),\ k \in \mathbb{N}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B_3)$ pour $\omega = \frac{6}{5}$ en utilisant le fait que le module des deux racines complexes de $\lambda^2 + \lambda + 25$ est égal à 5.
Conclure sur la convergence de la méthode SOR pour la matrice A avec $\omega = \frac{6}{5}$.

Corrigé : On a $\widetilde{x}^{(k+1)} = \frac{1}{\omega}x^{(k+1)} + (1 - \frac{1}{\omega})x^{(k)}$, d'où

$$\frac{D}{\omega}x^{(k+1)} + (1 - \frac{1}{\omega})Dx^{(k)} = b + Fx^{(k+1)} + Ex^{(k)}.$$

Il en résulte que

$$(\frac{D}{\omega} - F)x^{(k+1)} = b + (\frac{D}{\omega} - D + E)x^{(k)} = (\frac{D}{\omega} - F)x^{(k)} + b + (-D + F + E)x^{(k)} = (\frac{D}{\omega} - F)x^{(k)} + (b - Ax^{(k)}),$$

Comme $\omega > 0$ et D inversible, la matrice triangulaire $(\frac{D}{\omega} - F)$ est inversible et on a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (\frac{D}{\omega} - F)^{-1}(b - Ax^{(k)}).$$

On reconnait l'algorithme de Richardson à pas 1 préconditionné par SOR. Classiquement on a ensuite

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (x^{(k)} - \bar{x}) + (\frac{D}{\omega} - F)^{-1}A(x^{(k)} - \bar{x}),$$

d'où $B_3 = I - (\frac{D}{\omega} - F)^{-1}A$. On a

$$(\frac{D}{\omega} - F) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

puis

$$(\frac{D}{\omega} - F)^{-1} = \frac{3}{25}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$(\frac{1}{\omega}D - F)^{-1}A = \frac{3}{25}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

et

$$B_3 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}.$$

On trouve que les valeurs propres complexes de B_3 sont égales à $\frac{1}{25}$ fois les racines du polynôme $\lambda^2 + \lambda + 25$ donc de module $\rho(B_3) = \frac{1}{5} < 1$. On en déduit que l'algorithme SOR converge.