TD Analyse Numérique Licence L3 MASS, TD1

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible telle que $A_{i,i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'algorithme de Gauss Seidel pour résoudre le système linéaire $Ax = b$: on se donne $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et on calcule $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ pour $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$A_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j^{(k)},\ i = 1, \cdots, n.$$

(1) Montrer que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + L^{-1}\Big(b - Ax^{(k)}\Big),\ k \in \mathbb{N},$$

avec L la partie triangulaire inférieure de A ie la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$L_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} \text{ si } i \geq j, \\ 0 \text{ si } i < j. \end{cases},$$

(2) Soit $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution de $Ax = b$ et $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}, k \in \mathbb{N}.$$

avec $B = (I - L^{-1}A)$ puis

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)},$$

et donner la condition nécessaire et suffisante du cours pour que la suite $x^{(k)}$ converge vers x.

(3) En utilisant un résultat du cours, montrer que

$$\|e^{(k)}\|_2 \leq (\sqrt{\rho({}^tBB)})^k \|e^{(0)}\|_2.$$

(4) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et $b \in \mathbb{R}^2$ donné. Calculer la matrice d'itération $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'algorithme de Gauss Seidel et calculer les valeurs propre de B. En déduire si l'algorithme de Gauss Seidel converge ou non pour cette matrice A.

(5) Calculer $\sqrt{\rho({}^tBB)}$ pour la matrice A ci-dessus Qu'en déduisez vous sur la convergence de l'algorithme de Gauss Seidel pour cette matrice en comparaison avec la convergence de l'algorithme de Richardson à pas $\alpha = 1$ et avec la convergence de l'algorithme de Richardson à pas optimal ?

(6) En déduire une condition suffisante sur le nombre d'itérations k de l'algorithme de Gauss Seidel pour que

$$\frac{\|e^{(k)}\|_2}{\|e^{(0)}\|_2} \leq \epsilon$$

pour une précision $\epsilon > 0$ donnée.

Exercice 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible telle que $A_{i,i} \neq 0$ pour tous $i = 1, \cdots, n$. On note $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Précisément, on a pour tous $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad E_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \qquad F_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

On considère le système linéaire

$$Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné et on note $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution.
On rappelle que l'algorithme de Richardson de pas $\alpha = 1$ préconditionné par une matrice inversible C s'écrit : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C^{-1}(b - Ax^{(k)}), \ k \in \mathbb{N}.$$

(1) On considère la méthode itérative $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$Dx^{(k+1)} = b + (E + F)x^{(k)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il s'agit de l'algorithme de Richardson de pas 1 préconditionné par la diagonale de A (méthode de Jacobi).

Calculer la matrice B_1 telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B_1(x^{(k)} - \bar{x}), \ k \in \mathbb{N}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B_1)$ et conclure sur la convergence de la méthode de Jacobi pour la matrice A.

(2) On considère la méthode itérative $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$Dx^{(k+1)} = b + Fx^{(k+1)} + Ex^{(k)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il s'agit de l'algorithme de Richardson de pas 1 préconditionné par la partie triangulaire supérieure de A (méthode de Gauss Seidel).

Calculer la matrice d'itération B_2 telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B_2(x^{(k)} - \bar{x}), \ k \in \mathbb{N}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B_2)$ et conclure sur la convergence de la méthode de Gauss Seidel pour la matrice A.

(3) On considère la méthode itérative $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} D\widetilde{x}^{(k+1)} = b + Fx^{(k+1)} + Ex^{(k)}, \\ x^{(k+1)} = \omega\widetilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)} \end{cases}$$

Montrer qu'il s'agit de l'algorithme de Richardson de pas 1 préconditionné par $C = (\frac{1}{\omega}D - F)$, donc la méthode Successive Over Relaxation (SOR).

Calculer la matrice d'itération B_3 telle que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = B_3(x^{(k)} - \bar{x}),\ k \in \mathbb{N}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\rho(B_3)$ pour $\omega = \frac{6}{5}$ en utilisant le fait que le module des deux racines complexes de $\lambda^2 + \lambda + 25$ est égal à 5.
Conclure sur la convergence de la méthode SOR pour la matrice A avec $\omega = \frac{6}{5}$.