TD Analyse Numérique Licence L3 MASS, TD2 corrigé

Exercice 1 : Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Soit une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$0 < \gamma f'(\bar{x}) < 2.$$

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\gamma f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta^{(k)} \in]\min(\bar{x}, x^{(k)}), \max(\bar{x}, x^{(k)})[$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Calculer β_k en fonction de γ et $\theta^{(k)}$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \beta_k (x^{(k)} - \bar{x}).$$

Corrigé : comme $f(\bar{x}) = 0$, on a

$$(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\gamma(f(x^{(k)}) - f(\bar{x})) = -\gamma f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}),$$

d'où

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (1 - \gamma f'(\theta^{(k)}))(x^{(k)} - \bar{x}),$$

et

$$\beta_k = (1 - \gamma f'(\theta^{(k)})).$$

(2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

Corrigé : comme $0 < \gamma f'(\bar{x}) < 2$ on remarque que

$$-1 < 1 - \gamma f'(\bar{x}) < 1,$$

et donc $|1 - \gamma f'(\bar{x})| < 1$. Comme f' est une fonction continue on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tout $\theta^{(k)} \in I_\alpha$ alors $|\beta_k| \leq \beta$. Comme $\theta^{(k)} \in]\min(\bar{x}, x^{(k)}), \max(\bar{x}, x^{(k)})[$, alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ implique que $\theta^{(k)} \in I_\alpha$ d'où la propriété demandée.

(3) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

Corrigé : supposons que $x^{(k)} \in I_\alpha$, il en résulte d'après la question précédente que

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}| < \beta\alpha < \alpha,$$

et donc que $x^{(k+1)} \in I_\alpha$. On en déduit par récurrence que $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(4) Déduire des questions (2) et (3) que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ et montrer que la convergence est linéaire avec

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |1 - \gamma f'(\bar{x})|,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \geq 0$.

Corrigé : Si $x^{(0)} \in I_\alpha$, on déduit des questions (2) et (3) que

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et donc

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq (\beta)^k |x^{(0)} - \bar{x}|.$$

Il en résulte que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ et donc que $\lim_{k\to+\infty} \theta^{(k)} = \bar{x}$. Par continuité de la fonction f', on déduit de la question (1) que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |1 - \gamma f'(\bar{x})|.$$

(5) Proposer un choix de γ donnant la convergence quadratique de l'algorithme.

Corrigé : une condition nécessaire pour obtenir la convergence quadratique est que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = 0,$$

ce que l'on obtient avec

$$\gamma = \frac{1}{f'(\bar{x})},$$

ce qui est un choix admissible dès lors que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Montrons que sous ces conditions, l'algorithme converge quadratiquement. L'algorithme est équivalent au point fixe

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),$$

avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(\bar{x})}.$$

On vérifie que $g'(\bar{x}) = 0$ et que g est dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ce qui montre d'après le cours que l'algorithme converge au moins quadratiquement dès lors que le point initial $x^{(0)}$ est suffisament proche de $\bar{x}$.

On peut remarquer que cet algorithme de convergence quadratique n'est pas utilisable en pratique car on cherche justement $\bar{x}$. Il est remplacé par sa variante qui est l'algorithme de Newton qui s'obtient en remplaçant $f'(\bar{x})$ par $f'(x)$.

Exercice 2 :

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \dfrac{-f(x^{(k)})f(x^{(k)})}{f\Big(x^{(k)} + f(x^{(k)})\Big) - f(x^{(k)})}, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) On rappelle que d'après le théorème des accroissements finis il existe $\theta_k \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ et $\xi_k \in]x^{(k)}, x^{(k)} + f(x^{(k)})[$ tels que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta_k)(x^{(k)} - \bar{x}) \quad \text{et} \quad f\Big(x^{(k)} + f(x^{(k)})\Big) - f(x^{(k)}) = f'(\xi_k) f(x^{(k)}).$$

Montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \Big(1 - \frac{f'(\theta_k)}{f'(\xi_k)}\Big)(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Corrigé : comme $f(\bar{x}) = 0$ on a

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = (x^{(k)} - \bar{x}) - \frac{f(x^{(k)})(f(x^{(k)}) - f(\bar{x}))}{f\Big(x^{(k)} + f(x^{(k)})\Big) - f(x^{(k)})},$$

d'où

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \Big(1 - \frac{f'(\theta_k)f(x^{(k)})}{f'(\xi_k)f(x^{(k)})}\Big)(x^{(k)} - \bar{x}) = \Big(1 - \frac{f'(\theta_k)}{f'(\xi_k)}\Big)(x^{(k)} - \bar{x}).$$

(2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que si $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$, avec $x^{(k)} \neq \bar{x}$ alors $x^{(k+1)}$ est bien défini et

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

Corrigé : on remarque que $\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \xi_k = \bar{x}$ et $\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \theta_k = \bar{x}$ puis par continuité de f' on a donc $\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} f'(\xi_k) = f'(\bar{x})$ et $\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} f'(\theta_k) = f'(\bar{x})$. Comme $f'(\bar{x}) \neq 0$ on en déduit que

$$\lim_{x^{(k)} \to \bar{x}} \Big(1 - \frac{f'(\theta_k)}{f'(\xi_k)}\Big) = 0.$$

Par définition de la limite, il existe donc $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tel que si $x^{(k)} \in I_\alpha$, avec $x^{(k)} \neq \bar{x}$ alors $x^{(k+1)}$ est bien défini et

$$|\Big(1 - \frac{f'(\theta_k)}{f'(\xi_k)}\Big)| \leq \beta,$$

donc

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(3) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ et en supposant $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout k, alors $x^{(k)}$ est bien défini et $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

Corrigé : Montrons par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $x^{(k)} \in I_\alpha$, alors d'après la question précédente

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}| < \beta\alpha < \alpha,$$

donc $x^{(k+1)} \in I_\alpha$. On en déduit que pour tous les $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|,$$

et donc

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \beta^k |x^{(0)} - \bar{x}|.$$

Comme $\lim_{k \to +\infty} \beta^k = 0$ on déduit que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

(4) Montrer que la convergence est super linéaire au sens où

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = 0,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

Corrigé : d'après la question 1 et la question 3, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = \lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{f'(\theta_k)}{f'(\xi_k)}\right) = 0.$$

Il en résulte que la convergence de l'algorithme est superlinéaire.