TD Analyse Numérique Licence L3 MASS, TD2

Exercice 1 : Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Soit une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$0 < \gamma f'(\bar{x}) < 2.$$

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\gamma f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta^{(k)} \in]\min(\bar{x}, x^{(k)}), \max(\bar{x}, x^{(k)})[$ tel que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Calculer β_k en fonction de γ et $\theta^{(k)}$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \beta_k (x^{(k)} - \bar{x}).$$

(2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que pour tout $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ on ait

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(3) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(4) Déduire des questions (2) et (3) que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ et montrer que la convergence est linéaire avec

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |1 - \gamma f'(\bar{x})|,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \geq 0$.

(5) Proposer un choix de γ donnant la convergence quadratique de l'algorithme et comparer l'algorithme obtenu à l'algorithme de Newton.

Exercice 2 :
Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.
On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \dfrac{-f(x^{(k)}) f(x^{(k)})}{f\Big(x^{(k)} + f(x^{(k)})\Big) - f(x^{(k)})},\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) On rappelle que d'après le théorème des accroissements finis il existe $\theta_k \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ et $\xi_k \in]x^{(k)}, x^{(k)} + f(x^{(k)})[$ tels que

$$f(x^{(k)}) - f(\bar{x}) = f'(\theta_k)(x^{(k)} - \bar{x}) \quad \text{et} \quad f\Big(x^{(k)} + f(x^{(k)})\Big) - f(x^{(k)}) = f'(\xi_k) f(x^{(k)}).$$

Montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \Big(1 - \frac{f'(\theta_k)}{f'(\xi_k)}\Big)(x^{(k)} - \bar{x}).$$

(2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que si $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$, avec $x^{(k)} \neq \bar{x}$ alors $x^{(k+1)}$ est bien défini et

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(3) En déduire par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ et en supposant $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout k, alors $x^{(k)}$ est bien défini et $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

(4) Montrer que la convergence est super linéaire au sens où

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = 0,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.