Corrigé du TD Analyse Numérique Licence L3 MASS

Exercice 1 : algorithme de point fixe en dimension n.

Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un point fixe de g tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$. On suppose que $\|Dg(\bar{x})\| < 1$ pour la norme induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$. On considère l'algorithme de point fixe suivant : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \text{ pour tous } k \in \mathbb{N}.$$

On définit la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon δ comme suit

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x - a\| < \delta\}.$$

On utilisera le Lemme (théorème des accroissements finis) suivant : soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$, on définit le segment $]a, b[\subset \mathbb{R}^n$ comme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x = \theta a + (1 - \theta)b,\ \theta \in (0, 1)\},$$

alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \Big(\sup_{x \in]a,b[} \|Df(x)\| \Big) \|b - a\|.$$

(i) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tel que pour tout $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ alors

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|.$$

Corrigé : comme Dg est continue au point $\bar{x}$ et que $\|Dg(\bar{x})\| < 1$, on deduit par continuité qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que

$$\|Dg(x)\| \leq \beta \text{ pour tous } x \in B(\bar{x}, \alpha).$$

En utilisant le théorème des accroissements finis ci dessus, on a donc que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| = \|g(x^{(k)}) - g(\bar{x})\| \leq \Big(\sup_{x \in]\bar{x}, x^{(k)}[} \|Df(x)\| \Big) \|x^{(k)} - \bar{x}\|.$$

Comme $]\bar{x}, x^{(k)}[\subset B(\bar{x}, \alpha)$ dès lors que $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$, on a bien

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|.$$

(ii) En déduire que si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ alors $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|.$$

Corrigé : On procède par récurrence. On a par hypothèse que $x^{(0)} \in B(\bar{x}, \alpha)$. Supposons que $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$, alors d'après la question précédente on a

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\| < \beta\alpha < \alpha,$$

et donc $x^{(k+1)} \in B(\bar{x}, \alpha)$. On en déduit que par récurrence $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Donc, d'après la question précédente il résulte aussi que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\| \text{ pour tous } k \in \mathbb{N}.$$

(iii) En déduire que si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ alors

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \beta^k \|x^{(0)} - \bar{x}\| \text{ pour tous } k \in \mathbb{N},$$

conclure que la suite $x^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ converge vers $\bar{x}$.

Corrigé : montrons la propriété par récurrence. Pour $k = 0$, comme $\beta^0 = 1$ elle se réduit à

$$\|x^{(0)} - \bar{x}\| \leq \|x^{(0)} - \bar{x}\|,$$

qui est toujours vérifié. Supposons la propriété vérifiée pour $k \in \mathbb{N}$, alors d'après la question précédente on a

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \beta\beta^k \|x^{(0)} - \bar{x}\| \leq \beta^{k+1} \|x^{(0)} - \bar{x}\|,$$

ce qui démontre par récurrence que $\|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \beta^k \|x^{(0)} - \bar{x}\|$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Comme $\beta < 1$, on a $\lim_{k \to +\infty} \beta^k = 0$ et donc $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.

Exercice 2 : Newton et point fixe en dimension 2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 2\sin(x_1) + 2\cos(x_2) \\ -5x_2 + 2\sin(x_2) + 2\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

On cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

(1) Mettre le système $f(x) = 0$ sous la forme d'un point fixe $g(x) = x$ avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ contractante par rapport à la norme $\|\|_1$.
En déduire qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et que la suite

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N} \text{ avec } x^{(0)} \in \mathbb{R}^2 \text{ donné}$$

converge vers $\bar{x}$ au moins linéairement.
Corrigé : On considère la fonction

$$g(x) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \sin(x_1) + \cos(x_2) \\ \sin(x_2) + \cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

de sorte que $f(x) = 5(g(x) - x)$ et donc que $f(x) = 0$ est équivalent à $g(x) = x$. On va montrer que $\|dg(x)\|_1 \leq \frac{4}{5}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$ ce qui démontrera que g est une contraction sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la norme $\|\|_1$. On a

$$dg(x) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \cos(x_1) & -\sin(x_2) \\ -\sin(x_1) & \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$dg(x)y = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \cos(x_1)y_1 - \sin(x_2)y_2 \\ -\sin(x_1)y_1 + \cos(x_2)y_2 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\|dg(x)y\|_1 = \frac{2}{5}\Big(|\cos(x_1)y_1 - \sin(x_2)y_2| + |-\sin(x_1)y_1 + \cos(x_2)y_2|\Big),$$

et donc

$$\|dg(x)y\|_1 \leq \frac{2}{5}\Big(|y_1| + |y_2| + |y_1| + |y_2|\Big) = \frac{4}{5}\|y\|_1.$$

On en déduit que

$$\|dg(x)\|_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}^2, y\neq 0} \frac{\|dg(x)y\|_1}{\|y\|_1} \leq \frac{4}{5}.$$

Montrons maintenant que l'application g continue sur $\mathbb{R}^2$ et contractante sur $\mathbb{R}^2$ admet nécessairement un unique point fixe. Pour cela on va montrer que la suite $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),$$

converge vers un point fixe de g. On note $\gamma = \frac{4}{5}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1 = \|g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})\|_1 \leq \gamma \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_1,$$

par récurrence on en déduit que

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1 \leq \gamma^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1.$$

On a donc

$$\|x^{(k+q)} - x^{(k)}\|_1 \leq \Big(\sum_{l=1}^{q} \gamma^{k+l-1}\Big)\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1,$$

ce qui montre que la suite $x^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy. Comme l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$ est complet, on en déduit que cette suite converge vers $z \in \mathbb{R}^2$. Comme l'application g est continue on a nécessairement

$$z = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} g(x^{(k-1)}) = g\Big(\lim_{k\to+\infty} x^{(k-1)}\Big) = g(z),$$

et donc z est un point fixe de g ce qui prouve l'existence du point fixe. En ce qui concerne l'unicité, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ et $b \in R^2$ tels que $a = g(a)$ et $b = g(b)$, alors

$$\|b - a\|_1 = \|g(b) - g(a)\|_1 \leq \gamma \|b - a\|_1,$$

ce qui implique que $\|b - a\|_1 = 0$ et donc $a = b$, d'où l'unicité du point fixe noté $\bar{x}$. Pour montrer la convergence linéaire de la suite on écrit

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|_1 = \|g(x^{(k)}) - g(\bar{x})\|_1 \leq \gamma \|x^{(k)} - \bar{x}\|_1,$$

d'où par récurrence

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|_1 \leq \gamma^k \|x^{(0)} - \bar{x}\|_1,$$

ce qui montre la convergence linéaire de la suite.

(2) Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le système non linéaire $f(x) = 0$. Est-il toujours défini ?
Corrigé : l'algorithme de Newton s'écrit : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$df(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)}).$$

On a

$$df(x) = -5I + 2\begin{pmatrix} \cos(x_1) & -\sin(x_2) \\ -\sin(x_1) & \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Montrons que $df(x)$ est inversible quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$ ce qui montrera que l'algorithme de Newton est toujours bien défini.

$$det(df(x)) = (-5 + 2\cos(x_1))(-5 + 2\cos(x_2)) - 4\sin(x_1)\sin(x_2),$$

d'où

$$det(df(x)) = 25 - 10\cos(x_1) - 10\cos(x_2) + 4\cos(x_1)\cos(x_2) - 4\sin(x_1)\sin(x_2),$$

puis

$$det(df(x)) = 25 - 10\cos(x_1) - 10\cos(x_2) + 4\cos(x_1 + x_2) \geq 1,$$

ce qui montre que la matrice $df(x)$ est toujours inversible.