TD Analyse Numérique Licence L3 MASS

Exercice 1 : algorithme de point fixe en dimension n.

Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un point fixe de g tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$. On suppose que $\|Dg(\bar{x})\| < 1$ pour la norme induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$. On considère l'algorithme de point fixe suivant : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \text{ pour tous } k \in \mathbb{N}.$$

On définit la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon δ comme suit

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x - a\| < \delta\}.$$

On utilisera le Lemme (théorème des accroissements finis) suivant : soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$, on définit le segment $]a, b[\subset \mathbb{R}^n$ comme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x = \theta a + (1 - \theta)b,\ \theta \in (0, 1)\},$$

alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \Big(\sup_{x \in]a,b[} \|Df(x)\| \Big) \|b - a\|.$$

(i) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tel que pour tout $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ alors

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|.$$

(ii) En déduire que si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ alors $x^{(k)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|.$$

(iii) En déduire que si $x^{(0)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ alors

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \beta^k \|x^{(0)} - \bar{x}\| \text{ pour tous } k \in \mathbb{N},$$

conclure que la suite $x^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ converge vers $\bar{x}$.

Exercice 2 : Newton et point fixe en dimension 2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 2\sin(x_1) + 2\cos(x_2) \\ -5x_2 + 2\sin(x_2) + 2\cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

On cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

(1) Mettre le système $f(x) = 0$ sous la forme d'un point fixe $g(x) = x$ avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ contractante par rapport à la norme $\|\|_1$.
En déduire qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et que la suite

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N} \text{ avec } x^{(0)} \in \mathbb{R}^2 \text{ donné}$$

converge vers $\bar{x}$ au moins linéairement.

(2) Ecrire l'algorithme de Newton pour résoudre le système non linéaire $f(x) = 0$. Est-il toujours défini ?