TD Analyse Numérique Licence L3 MASS, TDs 4 et 5, corrigé

Exercice 1 : On considère un réel $\lambda \neq 0$ et l'EDO $x(0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0.$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation en temps uniforme : $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \cdots, m$. On considère le schéma d'Euler implicite : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda\ x_{k+1},\ k = 0, \cdots, m-1.$$

On considère également le schéma d'Euler explicite : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda\ x_k,\ k = 0, \cdots, m-1.$$

(1) Calculer la solution exacte de l'EDO notée $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$.

Corrigé : la solution est $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{-\lambda t}$.

(2) Calculer les solutions des deux schémas x_k pour $k = 0, \cdots, m$

Corrigé : on trouve

$$x_k = \Big(\frac{1}{1 + \lambda\Delta t}\Big)^k x_0,$$

pour le schéma d'Euler implicite et

$$x_k = \Big(1 - \lambda\Delta t\Big)^k x_0,$$

pour le schéma d'Euler explicite.

(3) On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t > 0$

Corrigé : pour $\lambda > 0$ on a $0 \leq \frac{1}{1+\lambda\Delta t} \leq 1$ d'où le résultat.

(4) On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur Δt pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$.

Corrigé : la condition équivaut à $|1 - \lambda\Delta t| \leq 1$ et donc à $-1 \leq 1 - \lambda\Delta t \leq 1$ ce qui équivaut à $\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda|}$.

(5) On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite x_k reste du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t > 0$.

Corrigé : c'est immédiat car $\frac{1}{1+\lambda\Delta t} \geq 0$.

(6) On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur Δt pour que la solution du schéma d'Euler explicite x_k soit du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$.

Corrigé : cela équivaut à $1 - \lambda\Delta t \geq 0$ et donc à $\Delta t \leq \frac{1}{|\lambda|}$.

(7) On suppose que $\lambda < 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler explicite x_k reste du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t > 0$.

Corrigé : c'est immédiat car $1 - \lambda\Delta t \geq 0$.

(8) On suppose que $\lambda < 0$. Donner une condition sur Δt pour que la solution du schéma d'Euler implicite x_k soit du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$.

Corrigé : cela équivaut à $1 + \lambda\Delta t \geq 0$ et donc à $\Delta t < \frac{1}{|\lambda|}$ (on a exclu $\Delta t = \frac{1}{|\lambda|}$, pas de temps pour lequel le schéma n'est pas défini).

(9) Soit $\bar{x}_k = \bar{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler implicite

$$r_k = \frac{\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k}{\Delta t} + \lambda\ \bar{x}_{k+1},$$

vérifie $|r_k| \leq \frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$.

Corrigé : on a

$$r_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\bar{x}'(t) + \lambda\bar{x}(t_{k+1}))dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\bar{x}'(t) - \bar{x}'(t_{k+1}))dt.$$

D'après le théorème des accroissements finis on a pour tout $t \in \Big[t_k, t_{k+1}\Big]$

$$|\bar{x}'(t) - \bar{x}'(t_{k+1})| \leq \Big(\sup_{s\in(t,t_{k+1})} |\bar{x}''(s)|\Big)(t_{k+1} - t) \leq \Big(\sup_{s\in(0,T)} |\bar{x}''(s)|\Big)(t_{k+1} - t) = |\bar{x}_0|\lambda^2(t_{k+1} - t).$$

On en déduit que

$$|r_k| \leq |\bar{x}_0|\lambda^2 \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)dt = \frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t.$$

(10) On définit l'erreur $e_k = \bar{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler implicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation :

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} + \lambda\ e_{k+1} = r_k \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m-1.$$

Corrigé : elle s'obtient en soustrayant l'équation du schéma

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda\ x_{k+1},$$

de la définition de l'erreur de consistance $\frac{\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k}{\Delta t} = -\lambda\ \bar{x}_{k+1} + r_k$.

(11) On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m.$$

En déduire que le schéma d'Euler implicite converge à l'ordre 1 pour $\lambda > 0$.

Corrigé : on a la relation de récurrence

$$e_{k+1} = \frac{1}{1 + \lambda\Delta t}\Big(e_k + \Delta t r_k\Big).$$

Comme $\lambda > 0$ on a $|\frac{1}{1+\lambda\Delta t}| \leq 1$, on a donc

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \Delta t|r_k| \leq |e_k| + \Delta t\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big)$$

Par récurrence on en déduit que

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t.$$

(12) Reprendre l'estimation d'erreur de la question 11 pour le schéma d'Euler implicite avec $\lambda < 0$.

Corrigé : il faut remarquer que pour tout $\Delta t \leq \frac{1}{2|\lambda|}$ (condition que l'on suppose vérifiée dans cette question) on a

$$|\frac{1}{1+\lambda\Delta t}| \leq 1 + 2|\lambda|\Delta t \leq e^{2|\lambda|\Delta t}.$$

On a comme précédemment

$$|e_{k+1}| \leq |\frac{1}{1+\lambda\Delta t}|\Big(|e_k| + \Delta t\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big)\Big) \leq e^{2|\lambda|\Delta t}\Big(|e_k| + \Delta t\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big)\Big).$$

Par récurrence on en déduit que (cf cours Chapitre 3)

$$|e_k| \leq e^{2|\lambda|t_k}\Big(|e_0| + t_k e^1\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big)\Big).$$

(13) Reprendre les questions 9,10,11 pour le schéma d'Euler explicite avec $\lambda > 0$ puis avec $\lambda < 0$.

Corrigé : dans le cas du schéma d'Euler explicite, l'erreur de consistance est définie par

$$r_k = \frac{\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k}{\Delta t} + \lambda\ \bar{x}_k,$$

et l'équation de récurrence sur l'erreur par

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} + \lambda\ e_k = r_k \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m-1.$$

On montre comme pour la question (9) que

$$|r_k| \leq \frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t.$$

Supposons $\lambda > 0$. Dans ce cas, en supposant que $\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda|}$, on remarque (cf question 4) que $|1 - \lambda\Delta t| \leq 1$. Sous cette hypothèse, on montre comme pour la question (11) que

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \Delta t|r_k| \leq |e_k| + \Delta t\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big)$$

Par récurrence on en déduit que

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t.$$

Supposons maintenant que $\lambda < 0$. On a $1 + |\lambda|\Delta t \leq e^{|\lambda|\Delta t}$ puis comme pour la question (12)

$$|e_{k+1}| \leq (1 + |\lambda|\Delta t)|e_k| + \Delta t\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big) \leq e^{|\lambda|\Delta t}|e_k| + \Delta t\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big).$$

Par récurrence on en déduit que (cf cours Chapitre 3)

$$|e_k| \leq e^{|\lambda|t_k}\Big(|e_0| + t_k\Big(\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t\Big)\Big).$$