TD Analyse Numérique Licence L3 MASS, TDs 4 et 5

Exercice 1 : On considère un réel $\lambda \neq 0$ et l'EDO $x(0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0.$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation en temps uniforme : $m \in \mathbb{N}^*$, $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \cdots, m$. On considère le schéma d'Euler implicite : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda\ x_{k+1},\ k = 0, \cdots, m-1.$$

On considère également le schéma d'Euler explicite : $x_0 \in \mathbb{R}$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = -\lambda\ x_k,\ k = 0, \cdots, m-1.$$

(1) Calculer la solution exacte de l'EDO notée $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$.
(2) Calculer les solutions des deux schémas x_k pour $k = 0, \cdots, m$
(3) On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t > 0$
(4) On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur Δt pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$.
(5) On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite x_k reste du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t > 0$.
(6) On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur Δt pour que la solution du schéma d'Euler explicite x_k soit du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$.
(7) On suppose que $\lambda < 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler explicite x_k reste du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\Delta t > 0$.
(8) On suppose que $\lambda < 0$. Donner une condition sur Δt pour que la solution du schéma d'Euler implicite x_k soit du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$.
(9) Soit $\bar{x}_k = \bar{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler implicite

$$r_k = \frac{\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k}{\Delta t} + \lambda\ \bar{x}_{k+1},$$

vérifie $|r_k| \leq \frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$.
(10) On définit l'erreur $e_k = \bar{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler implicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation :

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\Delta t} + \lambda\ e_{k+1} = r_k \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m-1.$$

(11) On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{|\bar{x}_0|\lambda^2}{2}\Delta t \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m.$$

En déduire que le schéma d'Euler implicite converge à l'ordre 1 pour $\lambda > 0$.

(12) Reprendre l'estimation d'erreur de la question 11 pour le schéma d'Euler implicite avec $\lambda < 0$.
(13) Reprendre les questions 9,10,11 pour le schéma d'Euler explicite avec $\lambda > 0$ puis avec $\lambda < 0$.

Exercice 2 : Soient $f \in C^2\Big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n\Big)$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t), \ t > 0 \\ x(0) = \bar{x}_0, \end{cases}$$

de solution $\bar{x} \in C^3\Big([0, T], \mathbb{R}^n\Big)$ pour $T > 0$ donné.

On considère une discrétisation en temps $t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_k \cdots < t_m = T$, et on note $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, \cdots, m-1$ et $\Delta t = \max_{k=1,\cdots,m-1} \Delta t_k$.

Pour $\theta \in [0, 1]$, on considère le schéma suivant : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = \theta \ f(x_{k+1}, t_{k+1}) + (1 - \theta) \ f(x_k, t_k), \ k = 0, \cdots, m-1.$$

On définit l'erreur de consistance pour $k = 0, \cdots, m-1$:

$$r_k = \frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t_k} - \theta \ f(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) - (1 - \theta) \ f(\bar{x}(t_k), t_k).$$

(1) Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 1 quel que soit $\theta \in [0, 1]$ au sens où il existe une constante β (indépendante de Δt mais dépendante de $\bar{x}$ et T) telle que

$$\max_{k=0,\cdots,m-1} \|r_k\| \leq \beta \Delta t.$$

(2) Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 2 pour $\theta = 1/2$ au sens où il existe une constante γ (indépendante de Δt mais dépendante de $\bar{x}$ et T) telle que

$$\max_{k=0,\cdots,m-1} \|r_k\| \leq \gamma \Delta t^2.$$