Analyse Numérique Licence L3 de MASS, TP3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice SDP (Symétrique Définie Positive). On considère $b \in \mathbb{R}^n$ et le système linéaire $Ax = b$ de solution $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{On pose } e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)},\ r^{(k)} = Ae^{(k)} = b - Ax^{(k)},$$

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un préconditionnement SDP. On considère l'algorithme itératif de Richardson préconditionné par C pour résoudre le système $Ax = b$: $x^{(0)}$ donné, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $nr^{(0)} = \|r^{(0)}\|$, $nr = nr^{(0)}$ et pour $k \in \mathbb{N}$ tant que $\frac{nr}{nr^{(0)}} \geq \epsilon$ et $k \leq kmax$:

$$\begin{cases} p^{(k)} &= C^{-1}r^{(k)}, \\ q^{(k)} &= Ap^{(k)}, \\ \alpha^{(k)} &= \frac{(p^{(k)}, r^{(k)})}{(q^{(k)}, p^{(k)})}, \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha^{(k)}\ p^{(k)}, \\ r^{(k+1)} &= r^{(k)} - \alpha^{(k)}\ q^{(k)}, \\ nr &= \|r^{(k+1)}\|, \end{cases}$$

On considère dans ce qui suit le préconditionnement SSOR (Symmetric Successive Over Relaxation) :

$$C = (\frac{D}{\omega} - E)D^{-1}(\frac{D}{\omega} - F)$$

avec $\omega \in [1, 2[$ et où D est la partie diagonale de A, $-E$ est la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ est la partie triangulaire supérieure stricte de A.

(1) Programmer la fonction scilab $p = SSOR(n, A, \omega, r)$ qui calcule la solution $p \in \mathbb{R}^n$ du système

$$(\frac{D}{\omega} - E)D^{-1}(\frac{D}{\omega} - F)p = r.$$

On résoudra ce système en faisant une descente

$$(\frac{D}{\omega} - E)p_1 = r,$$

suivie d'une remontée

$$(\frac{D}{\omega} - F)p = Dp_1.$$

(2) Programmer dans scilab l'algorithme de Richardson à pas variable préconditionné suivant en utilisant la fonction $SSOR$ précédente :
— Choix de la précision $\epsilon = 10^{-10}$ sur le résidu relatif
— Initialisation : $x = 0$ (dans $\mathbb{R}^n$), $r = b - Ax$, $nr0 = nr = \|r\|_2$, $k = 0$
— Tant Que $\frac{nr}{nr0} > \epsilon$ Faire
  $k = k + 1$
  $p = SSOR(n, A, \omega, r)$
  $q = Ap$
  $\alpha = \frac{(p,r)}{(q,p)}$

$x \leftarrow x + \alpha p$
$r \leftarrow r - \alpha q$
$nr = \|r\|_2$

— End Tant Que
— $nit = k$

On utilisera la boucle *while condition* ; *end*, le produit scalaire $(x, y) = x' * y$.

(3) Tests numériques :
Tracer la courbe de la norme du résidu $nr^{(k)}$ fonction de k. Tester différentes valeur du paramètre de relaxation ω. Comparer la convergence obtenue avec celle de l'algorithme sans préconditionnement ie celui obtenu avec $p = r$ à la fois pour $n_x = 10$ ($n = 100$) et $n_x = 20$ ($n = 400$).